

Euklidische Geometrie

David Willimzig

20. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Rund ums Dreieck	3
1	Seiten, Winkel und der Flächeninhalt	3
2	Inkreis, Ankreise und Umkreis	8
3	Mehr über die Dreiecksfläche	14
4	Identitäten für die Radien	17
5	Einige Ungleichungen der Dreiecksgeometrie	19
6	Übungen	21
2	Klassiker	24
1	Die Sätze von Menelaos und Ceva	24
2	Menelaos' Gefolge	32
3	Übungen	33
3	Abbildungsgeometrie	36
1	Bewegungen	36
2	Isotomische und Isogonale Konjugation	36
3	Übungen	39
4	Lösungen	40
1	Lösungen Kapitel 1	40
2	Lösungen Kapitel 2	51

3	Lösungen Kapitel 3	58
A	Grundlagen	59
1	Kongruenz und Ähnlichkeit	59

1 Rund ums Dreieck

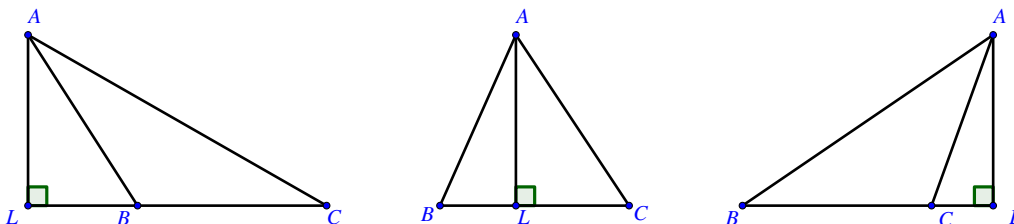
1 Seiten, Winkel und der Flächeninhalt

Bezeichnungen. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Seitenlängen a, b, c . Wir schreiben s für den Halbumfang von $\triangle ABC$ und F für seine Fläche. Mit l_a, l_b, l_c und m_a, m_b, m_c seien schließlich die Längen der Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden des Dreiecks gemeint.

Den Beginn macht der Cosinussatz. Dazu folgendes Lemma.

Lemma 1.1. Der Fußpunkt der Höhe auf die Seite BC sei L , dann gilt

$$LC = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2a}.$$



Beweis. Setze $u = LC$. Wir haben zwei Fälle.

Fall 1: Es gilt $\angle C \leq 90^\circ$ (Abb links und Mitte). Dann ist $BL = |a - u|$. Nach Pythagoras ist $AL^2 = b^2 - u^2 = c^2 - (a - u)^2$, also $b^2 - u^2 = c^2 - a^2 + 2au - u^2 \Rightarrow u = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ und wegen $a^2 + b^2 \geq c^2$ ist die rechte Seite bereits ≥ 0 .

Fall 2: Es ist $\angle C > 90^\circ$ (Abb. rechts). Dann folgt analog $AL^2 = b^2 - u^2 = c^2 - (a + u)^2$, das heißt $b^2 - u^2 = c^2 - a^2 - 2au - u^2 \Rightarrow u = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}$. Da $a^2 + b^2 < c^2$, gilt also $u = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2a}$. \square

Eine unmittelbare Folgerung ist der

Satz 1.1 (Cosinussatz). Für den Winkel bei C gilt

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

oder äquivalent

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Analoges gilt für die anderen Innenwinkel von Dreieck $\triangle ABC$.

Beweis. Wir unterscheiden die gleichen Fälle.

Fall 1: $\angle C \leq 90^\circ$. Es folgt $\cos C = \frac{u}{b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Fall 2: $\angle C > 90^\circ$. Dann gilt $\cos \angle LCA = \frac{u}{b} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$ und demnach $\cos C = \cos(180^\circ - \angle LCA) = -\cos \angle LCA = -\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. \square

Satz 1.2 (Heron-Formel).

$$F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Beweis. Für die Länge h der Höhe auf BC erhalten wir nach Pythagoras und Lemma 1.1

$$h^2 = b^2 - CL^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.$$

Hieraus folgt

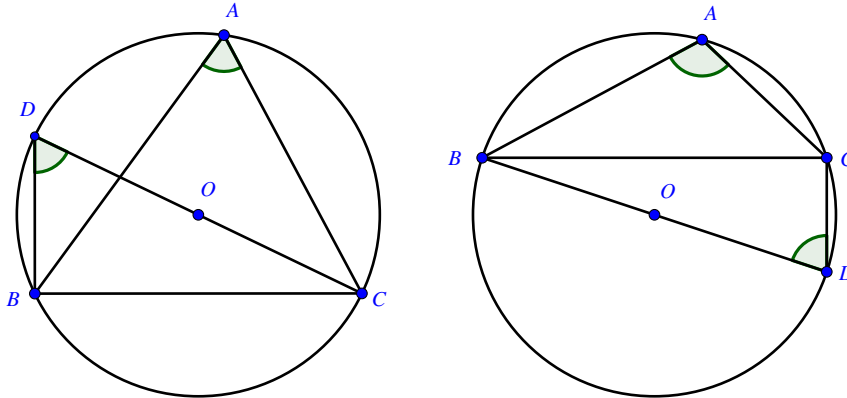
$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{1}{4} a^2 h^2 = \frac{1}{16} (4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{16} (2ab + a^2 + b^2 - c^2) (2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ &= \frac{1}{16} ((a+b)^2 - c^2) (c^2 - (a-b)^2) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{16} (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \\ &= s(s-a)(s-b)(s-c). \end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir dabei geschickt Gebrauch von der 3. Binomischen Formel gemacht. \square

Ein zweiter fundamentaler Satz der Dreiecksgeometrie ist der Sinussatz:

Satz 1.3 (Sinussatz).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



Beweis. Falls $\angle A = 90^\circ$, so gilt $BC = 2R$ nach dem Satz von Thales und die Behauptung ist klar. Wir nehmen nun $\angle A \neq 90^\circ$ an. Sei O der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ und D der zweite Schnittpunkt der Geraden CO mit dem Umkreis. Dann ist CD ein Durchmesser des Umkreises, also $\angle CBD = 90^\circ$. Es folgt

$$\sin D = \frac{BC}{DC} = \frac{a}{2R}. \quad (1)$$

Falls $\angle A < 90^\circ$, so liegen A und D auf derselben Seite der Sehne BC und es gilt $\angle A = \angle D$ nach dem Peripheriewinkelsatz. Ist $\angle A > 90^\circ$, so sind $\angle A$ und $\angle D$ gegenüberliegende Winkel eines Sehnenvierecks, also $\angle D = 180^\circ - \angle A$. In beiden Fällen ist jedoch $\sin A = \sin D$, aus (1) erhalten wir darum

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{2R} \iff \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Da die rechte Seite unabhängig von der Wahl des Eckpunktes A ist, folgt die vollständige Aussage. \square

Eine hübsche Anwendung des Sinussatzes ist ein häufig gebrauchter Satz über Winkelhalbierende – diese sind nämlich in der Lage, Seitenverhältnisse zu „transportieren“:

Satz 1.4. *Im $\triangle ABC$ sei D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels bei A mit der Seite BC . Dann teilt die Seite BC im Verhältnis der anliegenden Seiten, also $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\angle BAD = \angle DAC = \frac{A}{2}$. Der Sinussatz in den Dreiecken ABD und ADC besagt nun

$$\frac{BD}{c} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \angle ADB}, \quad \frac{DC}{b} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \angle ADC}.$$

Aus $\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$ folgt andererseits $\sin \angle ADB = \sin \angle ADC$. Die direkte Konsequenz obiger Gleichungen ist damit $\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b}$ oder $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$. \square

Aus dem Sinussatz erhalten wir außerdem zwei symmetrische Varianten der Flächenformel für Dreiecke, beide als „Arbeitspferde“ für Rechnungen gut geeignet. Mehr dazu in den folgenden Abschnitten.

Satz 1.5 (Flächenformel I).

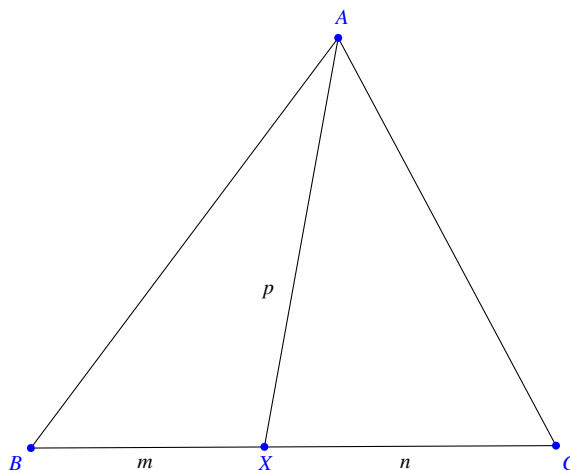
$$F = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Beweis. Ausgehend von $F = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}bc \sin A$ setzen wir $\sin A = \frac{a}{2R}$ gemäß Sinussatz ein und gelangen zu $F = \frac{abc}{4R}$. In umgekehrter Richtung setzen wir $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ ein, was die zweite Gleichung liefert. \square

Der Cosinussatz gestattet uns weiterhin, ein nützliches Resultat abzuleiten, mit welchem die Längenjagd im Dreieck beginnen kann.

Satz 1.6 (Stewart). Sei AX eine Ecktransversale der Länge p , die die Strecke BC in zwei Strecken mit den Längen $BX = m$ und $XC = n$ teilt. Dann gilt:

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$



Beweis. Wir wenden den Cosinussatz in den Dreiecken ABX und AXC an:

$$\cos \angle AXB = \frac{m^2 + p^2 - c^2}{2mp}, \quad \cos \angle AXC = \frac{n^2 + p^2 - b^2}{2np}.$$

Wegen $\angle AXB + \angle AXC = 180^\circ$ gilt aber $\cos \angle AXB + \cos \angle AXC = 0$ und Addition der oben stehenden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m^2 + p^2 - c^2}{2mp} + \frac{n^2 + p^2 - b^2}{2np} = \frac{m^2n + p^2n - c^2n + mn^2 + p^2m - b^2m}{2mnp} \\ &\Leftrightarrow 0 = mn(m+n) + p^2(m+n) - b^2m - c^2n \\ &\Leftrightarrow a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n. \end{aligned}$$

□

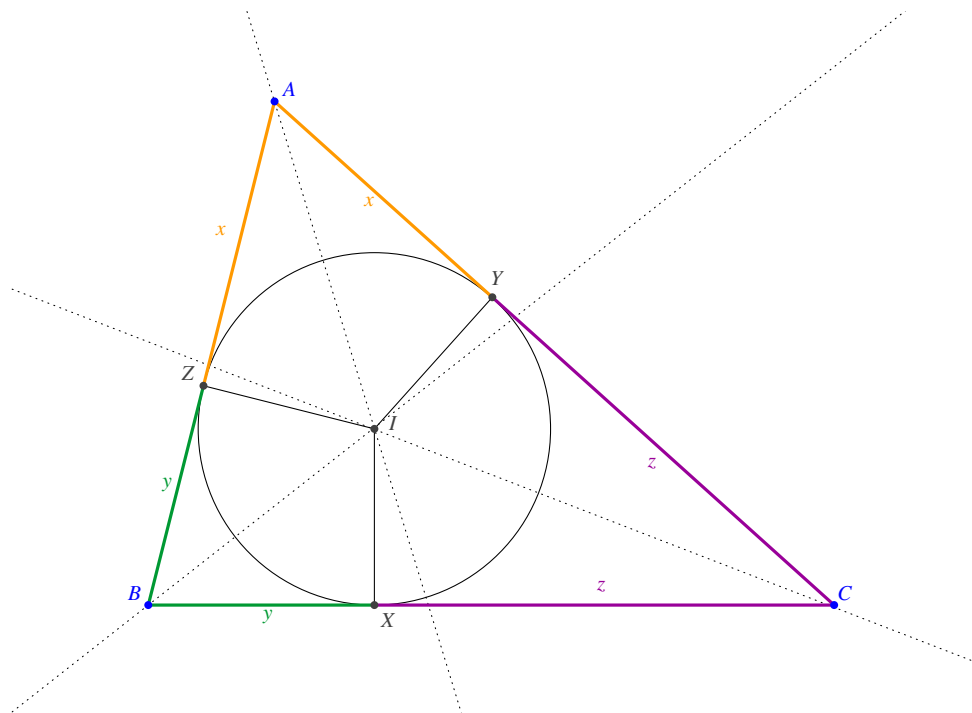
2 Inkreis, Ankreise und Umkreis

Bezeichnungen. Mit O bzw. I bezeichnen wir die Mittelpunkte von Umkreis und Inkreis des $\triangle ABC$ sowie mit I_a, I_b, I_c die Mittelpunkte der Ankreise k_a, k_b, k_c , die zu den Seiten BC, CA, AB gehören. Ferner seien R und r der Umkreis- und Inkreisradius sowie r_a, r_b, r_c die Radien der Ankreise.

Die Streckenlängen $s, s - a, s - b, s - c$ tauchen insbesondere als Längen der Tangentenabschnitte von den Ecken A, B, C an den Inkreis und an die Ankreise auf:

Satz 1.7 (Inkreis). Der Inkreis berühre die Seiten a, b, c des Dreiecks in den Punkten X, Y, Z . Dann gilt

$$AY = AZ = s - a, \quad BZ = BX = s - b, \quad CX = CY = s - c.$$



Beweis. Die Tangentenabschnitte von den Ecken A, B, C an den Inkreis sind jeweils gleichlang, also $x = AY = AZ$, $y = BZ = BX$, $z = CX = CY$. Demnach ist

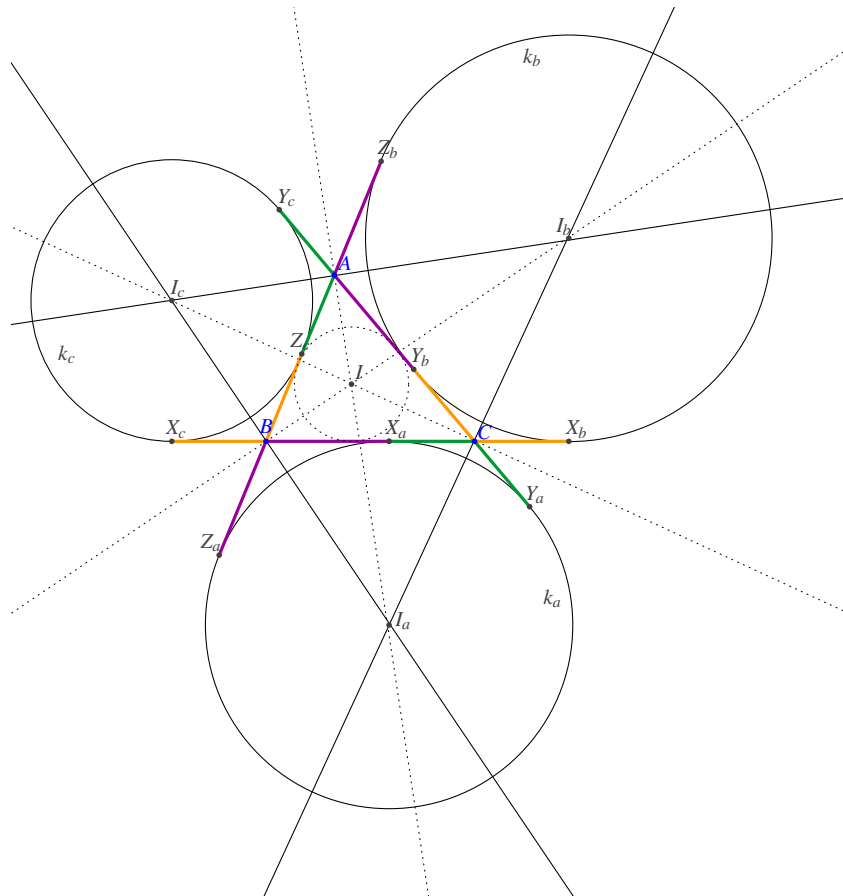
$$x + y = c, \quad x + z = b, \quad y + z = a$$

Addition der ersten beiden Gleichungen und Subtraktion der dritten ergibt

$$2x = (x+y) + (x+z) - (y+z) = c+b-a \Rightarrow x = \frac{c+b-a}{2} = s-a.$$

Analog folgt $y = s-b$ und $z = s-c$. □

Satz 1.8 (Ankreise). Die Tangentenabschnitte von A, B, C an den jeweils gegenüberliegenden Ankreis sind sämtlich gleichlang mit der Länge s .



Beweis. Wir arbeiten mit den Bezeichnungen in der Figur. Es genügt $BX_b = BZ_b = s$ zu zeigen. Wir haben bereits $BX_b = BZ_b$ und ebenso sind die Abschnitte der Tangenten von A bzw. C an k_b gleich lang, das heißt $CX_b = CY_b$ und $AY_b = AZ_b$. Daraus folgt

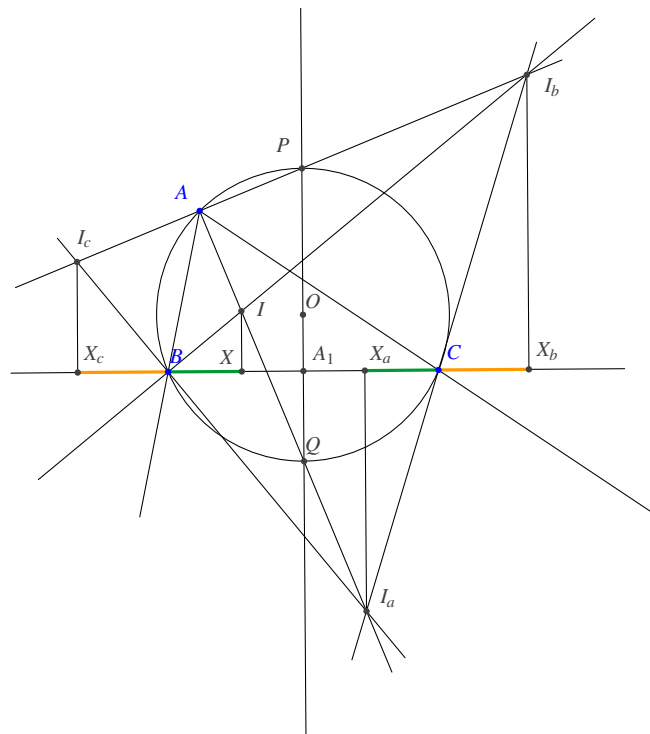
$$\begin{aligned} BX_b + BZ_b &= (a + CX_b) + (c + AZ_b) = a + CY_b + c + AY_b \\ &= a + b + c = 2s \end{aligned}$$

und daher $BX_b = BZ_b = s$. □

Mit Satz 1.8 können auch die Längen aller anderen Tangentenabschnitte an die Ankreise berechnet werden, vgl. hierzu die Einfärbungen, die mit denen aus Satz 1.7 korrespondieren.

Satz 1.9 (Inkreis-Ankreis-Theorem). Die Berührungspunkte von Ankreisen und Inkreis mit BC seien wieder X_a, X_b, X_c, X , es sei A_1 der Mittelpunkt von BC sowie k der Umkreis von $\triangle ABC$. Dann gilt:

- (i) AI schneidet den Umkreis im Mittelpunkt Q des Bogens BC . Auf $I_b I_c$ liegen A und der Mittelpunkt P des Kreisbogens BC , der A enthält. Der Punkt O liegt auf PQ .
- (ii) P ist Mittelpunkt von $I_c I_b$, A_1 ist Mittelpunkt von $X_b X_c$ und $PA_1 = \frac{r_b + r_c}{2}$.
- (iii) A_1 ist Mittelpunkt von XX_a , Q ist Mittelpunkt von II_a und $QA_1 = \frac{r_a - r}{2}$.
- (iv) Für die fünf Radien gilt $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.



Beweis. (i) Wegen $\angle BAI = \frac{A}{2}$ ist der Schnittpunkt Q von AI mit dem Umkreis k auch der Mittelpunkt des Bogens BC . Andererseits gilt $AI_b \perp AI$, ist also P der

zweite Schnittpunkt von AI_b mit k , so ist $\triangle APQ$ rechtwinklig bei A und nach der Umkehrung des Satzes von Thales PQ ein Durchmesser von k . Daher liegt O auf PQ und P muss Mittelpunkt des A enthaltenden Bogens BC sein.

(ii) Nach Satz 1.8 gilt $BX_c = CX_b = s - a$, daher ist A_1 Mittelpunkt von X_bX_c . Da PA_1 die Mittelsenkrechte der Seite BC ist, haben wir weiter $I_cX_c \parallel PA_1 \parallel I_bX_b$. Mit den Strahlensätzen folgt, dass P Mittelpunkt von I_bI_c ist und $PA_1 = \frac{r_b+r_c}{2}$ gilt.

(iii) Aus den Sätzen 1.7 und 1.8 wissen wir $BX = CX_a = s - b$, also ist A_1 auch Mittelpunkt von XX_a und der 2. Strahlensatz liefert dann $QA_1 = \frac{r_a-r}{2}$.

(iv) Nach Teil (i) gilt $2R = PQ = PA_1 + QA_1$ und Einsetzen der Formeln aus (ii), (iii) ergibt

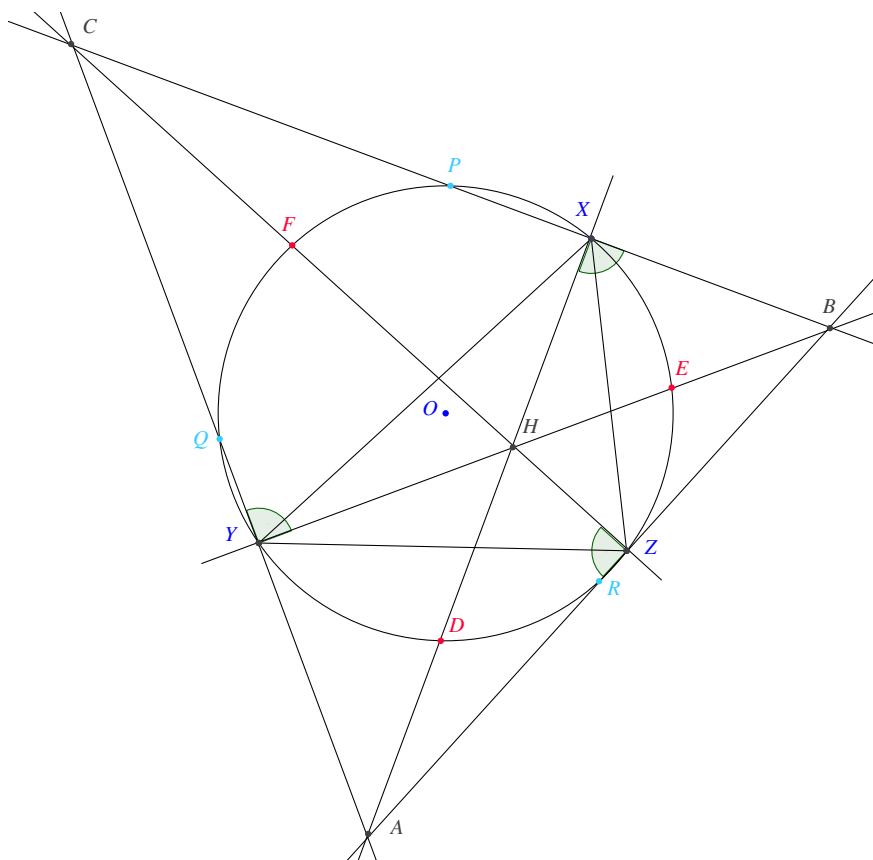
$$2R = \frac{r_b+r_c}{2} + \frac{r_a-r}{2} \Rightarrow r_a+r_b+r_c = 4R+r.$$

□

Die zweiten Schnittpunkte der Innen- bzw. Außenwinkelhalbierenden mit dem Umkreis k des Dreiecks ABC werden des öfteren als *Südpole* und *Nordpole* bezeichnet. Auf k versammeln sich also neben den Eckpunkten A, B, C des Dreiecks noch jeweils drei Nord- und Südpole, insgesamt neun Punkte. Mit dem *Inkreis-Ankreis-Theorem* gelangen wir jetzt noch weiter, zu dem bemerkenswerten Theorem über den *Neunpunktekreis*:

Satz 1.10 (Neunpunktekreis). *In jedem $\triangle ABC$ liegen die Fußpunkte der Höhen (resp. X, Y, Z), die Seitenmittelpunkte (resp. P, Q, R) und die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken zwischen Höhenschnittpunkt H und Eckpunkten des Dreiecks (resp. D, E, F) sämtlich auf einem Kreis.*

Die Mittelpunkte der Strecken AH, BH und CH werden übrigens auch als *Euler-Punkte* bezeichnet.



Beweis. Sei $\angle A$ der größte Innenwinkel.

Fall 1: $\angle A < 90^\circ$. Dann liegt H im Innern von $\triangle ABC$. Weil $BXHZ$ und $CYHX$ Sehnenvierecke sind, zeigt uns der Peripheriewinkelsatz, dass

$$\angle YXH = \angle YCH = 90^\circ - \angle A = \angle HBZ = \angle HXZ.$$

Die Höhe AX halbiert also den Innenwinkel $\angle YXZ$ des Höhenfußpunktdreiecks, gleiches gilt für die anderen Innenwinkel. Wegen $BC \perp AX$ etc. muss somit $\triangle ABC$ das Ankreismittelpunktdreieck bzgl. $\triangle XYZ$ sein und H dessen Inkreismittelpunkt. Die Seitenmitten von $\triangle ABC$ sind nunmehr die Nordpole P, Q, R von $\triangle XYZ$ und schließlich die Euler-Punkte gerade die Südpole von $\triangle XYZ$; diese beiden Aussagen folgen unmittelbar aus Satz 1.9(ii) und (iii).

Fall 2: $\angle A = 90^\circ$. Dann gilt $A = D = H = Y = Z$ sowie $E = R$ und $F = Q$. Sei nun M der Mittelpunkt von QR . Weil $ARPQ$ in diesem Fall ein Rechteck ist, liegen A, R, P und Q auf einem gemeinsamen Kreis um M , worin AP nach dem Thalesatz ein Durchmesser ist. Wieder wegen $\angle AXP = 90^\circ$ und Thales liegt X ebenfalls auf diesem Kreis.

Fall 3: $\angle A > 90^\circ$. Wir tauschen die Rollen von A und H : Es ist nämlich A der

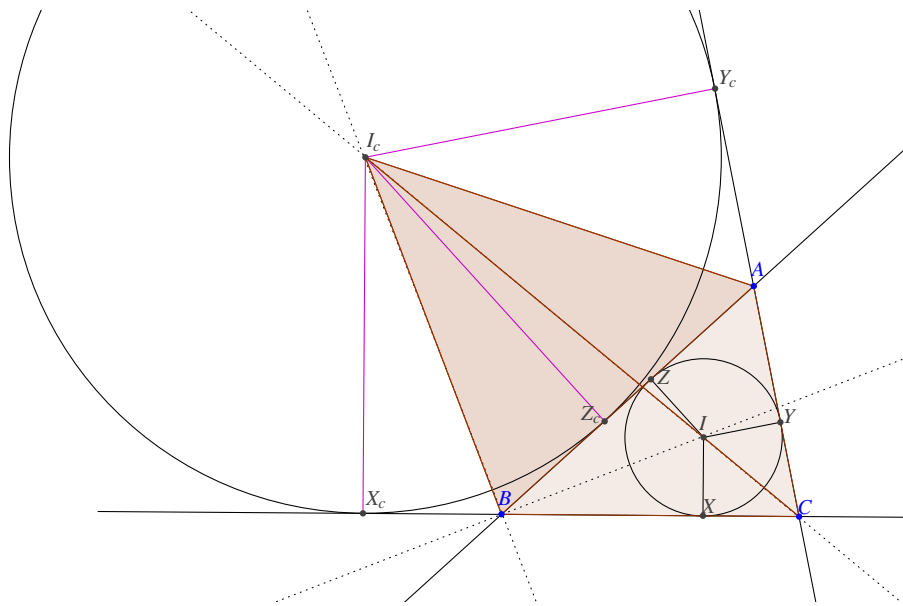
Höhenschnittpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ΔHBC . Dieses und ΔABC haben dasselbe Fußpunktdreieck und jeweils vertauschte Seitenmitten bzw. Eulerpunkte. Die Aussage folgt nun aus Fall 1 für Dreieck ΔHBC . \square

Angemerkt sei: Hinter den Kulissen ist hier eine *Möbius-Transformation* am Wirken.

3 Mehr über die Dreiecksfläche

Satz 1.11 (Flächenformel II).

$$F = rs = r_a(s - a) = r_b(s - b) = r_c(s - c).$$



Beweis. Betrachte die Zerlegung von $\triangle ABC$ in die Dreiecke AIB, BIC, CIA . Diese haben die Seiten von $\triangle ABC$ als Grundseiten und die zugehörigen Höhen sind sämtlich von der Länge r . Daraus folgt

$$F = \frac{1}{2}(ar + br + cr) = rs.$$

Auf ähnliche Weise bestimmen wir $F = [ABC]$ über

$$[ABC] = [BCI_c] + [CAI_c] - [ABI_c] = \frac{1}{2}(ar_c + br_c - cr_c) = r_c(s - c).$$

Analog werden die anderen Beziehungen gezeigt. □

Die Flächenformeln 1.11 bringen auch ein hübsches Zweigresultat zuwege:

Lemma 1.2.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

Beweis.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{s-a}{F} + \frac{s-b}{F} + \frac{s-c}{F} = \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{F} = \frac{s}{F} = \frac{1}{r}.$$

□

Damit beweisen wir eine berühmte Ungleichung, die auf Leonhard Euler (1707-1783) zurückgeht.

Satz 1.12 (Eulersche Ungleichung).

$$R \geq 2r.$$

Beweis. Wir multiplizieren die Formeln aus Satz 1.9 (iv) und aus Lemma 1.2 seitenweise miteinander. Das ergibt

$$(r_a + r_b + r_c) \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) = \frac{4R+r}{r} = \frac{4R}{r} + 1.$$

Die linke Seite ist aber ≥ 9 , und es folgt

$$9 \leq \frac{4R}{r} + 1 \implies 2r \leq R. \quad \square$$

Bei der Deutschland-Olympiade wurde eine räumliche Variante von Lemma 1.2 gestellt, die sich in Übung 9 findet. Im Zuge der Übung 11 wird in einer Lösungsvariante das folgende Problem mitgelöst:

Unter allen Dreiecken, die einem festen Kreis eingeschrieben werden können, diejenigen maximaler Fläche aufzufinden!

Wir halten hiervon das Ergebnis fest: Es ist

$$F = 2R^2 \cdot \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2, \quad (2)$$

worin Gleichheit genau für gleichseitige Dreiecke auftritt. Darauf aufbauend lässt sich das analoge Problem im Raum lösen:

Satz 1.13. *Unter allen einer festen Kugel eingeschriebenen Tetraedern haben genau die regulären Tetraeder maximales Volumen. Insbesondere folgt*

$$V \leq \frac{8\sqrt{3}}{27} \cdot R^3.$$

Beweis. Sei $ABCD$ ein Tetraeder mit Umkugel k und Umkugelradius R . Eine horizontale Ebene ε verlaufe durch den Umkugelmittelpunkt O . Wir rotieren das Tetraeder $ABCD$ derart, dass $\varepsilon(BCD) \parallel \varepsilon$ und bezeichnen mit h den Abstand der Spitze A von $\varepsilon(BCD)$. Bekanntlich gilt dann

$$V = \frac{1}{3}h \cdot [BCD].$$

Liegen nun A und O auf verschiedenen Seiten bezüglich $\varepsilon(BCD)$, so erzeugt die Spiegelung der Punkte B, C, D an der Ebene ε die Bildpunkte B', C', D' und mithin das volumengrößere Tetraeder $AB'C'D'$ mit einer entsprechenden Höhe $h' \geq R$. Wir können also fortan $h \geq R$ annehmen, genauer: $h = R + x$ mit $x = d(\varepsilon, \varepsilon(BCD))$. Für den Umkugelradius ρ von $\triangle BCD$ gilt nach dem Satz von Pythagoras $\rho^2 = R^2 - x^2$. Mit der Formel (2) des zugehörigen ebenen Problems folgt:

$$V \leq \frac{1}{3}(R+x) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(R+x)(R^2 - x^2).$$

Dies lässt sich a priori nicht weiter abschätzen, aber nach Anwendung eines Umformungstricks – *die Summe der Faktoren konstant machen* – mithilfe der AGM-Ungleichung:

$$\begin{aligned} V &\leq \frac{\sqrt{3}}{4}(R+x)(R^2 - x^2) = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot (R+x)(R+x)(2R-2x) \\ &\stackrel{\text{AGM}}{\leq} \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \left(\frac{(R+x) + (R+x) + (2R-2x)}{3} \right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \left(\frac{4R}{3} \right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{27} \cdot R^3. \end{aligned}$$

Hieran schließt sich die Untersuchung des Gleichheitsfalles an. Dieser kann nur eintreten, wenn in unseren beiden Abschätzungen Gleichheit herrscht. Das ist äquivalent dazu, dass $2R - 2x = R + x \Leftrightarrow x = \frac{R}{3} \Leftrightarrow h = \frac{4}{3}R$ und zudem $\triangle BCD$ gleichseitig ist.

Für ein reguläres Tetraeder mit Spitze A gilt ebenfalls $h = \frac{4}{3}R$. Denn AO ist sowohl durch A verlaufende Höhe als auch Schwerlinie und O der Schwerpunkt des Tetraeders. Dieser teilt die Schwerlinie im Verhältnis 3 : 1 (hier machen wir eine Anleihe auf die spätere Übung 18), das heißt $R = \frac{3}{4}h \Leftrightarrow h = \frac{4}{3}R$. Der Gleichseitigkeit von $\triangle BCD$ wegen ist das reguläre Tetraeder also bis auf eine Rotation um die Achse AO mit dem Tetraeder $ABCD$ identisch. Dies beschließt den Beweis. \square

4 Identitäten für die Radien

Im vorigen Kapitel haben wir die markanten Längen

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c$$

betrachtet. Nach Satz 1.7 lassen sich a, b, c, s auch in Abhängigkeit von x, y, z ausdrücken:

$$a = y + z, \quad b = x + z, \quad c = x + y \quad \text{und zudem} \quad s = x + y + z.$$

Bei Ungleichungen über die Seiten eines Dreiecken ist diese sogenannte *Ravi-Substitution* nützlich, denn $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ sind genau dann die Seiten eines Dreiecks, wenn schlicht $x, y, z > 0$ gilt.

Satz 1.14 (Radien). *Es gelten*

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}, \quad r_a = \sqrt{\frac{yz(x+y+z)}{x}}$$

mit entsprechenden Formeln für r_b, r_c und

$$R = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}.$$

Beweis. Die Heron-Formel liest sich als

$$F^2 = xyz(x+y+z) \Rightarrow F = \sqrt{xyz(x+y+z)}. \quad (3)$$

Nach den Flächenformeln 1.11 und 1.5 gilt ferner

$$F = rs = r(x+y+z), \quad F = r_a(s-a) = r_ax$$

sowie

$$F = \frac{abc}{4R} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4R}.$$

Einsetzen von (3) in die Flächenformeln liefert das Gewünschte. \square

Wir betrachten die *elementarsymmetrischen Polynome* in a, b, c , nämlich

$$\sigma_1(a, b, c) = a + b + c, \quad \sigma_2(a, b, c) = ab + bc + ca, \quad \sigma_3(a, b, c) = abc$$

Sowohl diese drei als auch die Polynome in x, y, z und in r_a, r_b, r_c wollen wir nacheinander durch Terme in R, r, s beschreiben. Wir benutzen ab sofort auch zyklische Summenschreibweise, z.B.

$$\sum_{\text{cyc}} r_a = r_a + r_b + r_c$$

und schreiben kurz $\sum r_a$, falls keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Satz 1.15. *Es gelten folgende Identitäten:*

	σ_1	σ_2	σ_3
a, b, c	$2s$	$4Rr + r^2 + s^2$	$4Rrs$
x, y, z	s	$4Rr + r^2$	r^2s
r_a, r_b, r_c	$4R + r$	s^2	rs^2

Beweis. Wir starten mit r_a, r_b, r_c . Nach Satz 1.9 (iv) gilt $\sum r_a = 4R + r$. Mit Satz 1.14 ist weiter

$$\begin{aligned} \sum r_a r_b &= \sum \sqrt{\frac{yz(x+y+z)}{x} \cdot \frac{zx(x+y+z)}{y}} = \sum z(x+y+z) \\ &= (x+y+z)^2 = s^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 1.2 ergibt dies

$$\frac{1}{r} = \sum \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_a r_b r_c} \sum r_a r_b = \frac{s^2}{r_a r_b r_c} \Rightarrow r_a r_b r_c = rs^2.$$

Wir beobachten als nächstes

$$r r_a = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z} \cdot \frac{yz(x+y+z)}{x}} = yz$$

und damit

$$\sum xy = \sum r r_a = r(4R + r) = 4Rr + r^2.$$

Außerdem ist $\sum x = s$ und nach der Heron-Formel

$$(rs)^2 = F^2 = xyz(x+y+z) = xyzs \Rightarrow xyz = r^2s.$$

Nun die Polynome in a, b, c : Wir haben $\sum a = 2s$ und gemäß Flächenformeln

$$abc = 4RF = 4Rrs.$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \sum ab &= \sum (y+z)(x+z) = \sum xy + \sum z(x+y+z) \\ &= \sum xy + s^2 = 4Rr + r^2 + s^2, \end{aligned}$$

womit alles gezeigt ist. □

5 Einige Ungleichungen der Dreiecksgeometrie

Als Anwendung der Ravi-Substitution beweisen wir die Euler-Ungleichung erneut:

Beweis (Euler 2). Satz 1.14 liefert, wobei $x, y, z > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &= \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}} \cdot \sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz} \\ &= 2 \cdot \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} \cdot \frac{y+z}{2\sqrt{yz}} \cdot \frac{z+x}{2\sqrt{zx}} \geq 2 \end{aligned}$$

nach der AGM-Ungleichung. Gleichheit tritt genau für $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$ ein. \square

Im folgenden seien h_a, h_b, h_c die Längen der Höhen von $\triangle ABC$. Auf IMOMath wird folgende Ungleichungskette bewiesen:

Satz 1.16.

$$\begin{aligned} 9r \leq h_a + h_b + h_c \leq l_a + l_b + l_c &\leq \sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a} \\ &\leq s\sqrt{3} \leq r_a + r_b + r_c = 4R + r. \end{aligned}$$

Beweis. (i) Wir beginnen mit $2F = \frac{1}{3}(ah_a + bh_b + ch_c)$ und wenden die Ungleichung von Tschebyscheff an:

$$r(a+b+c) = 2F \leq \frac{1}{9}(a+b+c)(h_a + h_b + h_c) \Rightarrow 9r \leq h_a + h_b + h_c$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = b = c$ ist.

(ii) folgt durch Addition der offenkundigen Ungleichungen $h_a \leq l_a, h_b \leq l_b$ und $h_c \leq l_c$.

(iii) Mit Übung 2 (ii) ergibt sich

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)} \leq \sqrt{s(s-a)} = \sqrt{r_b r_c},$$

die letzte Gleichheit gilt gemäß Beweis von Satz 1.15. Summation beweist die 3. Ungleichung.

(iv), (v) Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichungskette $xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$. Die rechte dieser Ungleichungen führt auf

$$(\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a})^2 \leq 3(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) = 3s^2,$$

was die 4. Ungleichung in der Kette zeigt. Die linke Ungleichung führt auf

$$3(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) \leq (r_a + r_b + r_c)^2$$

und zusammen mit Satz 1.15 als auch dem *Inkreis-Ankreis-Theorem* folgt

$$3s^2 \leq (4R + r)^2 \Rightarrow s\sqrt{3} \leq 4R + r.$$

□

Bemerkung. Aus Obigem folgt sofort $9r \leq 4R + r \Rightarrow 2r \leq R$, also erneut die *Euler-Ungleichung*.

Mit den Identitäten aus Kapitel 2 können auch zahlreiche weitere Ungleichungen gebastelt werden, ein Beispiel findet man in Übung 14. Die folgende Ungleichung ist, obwohl elementar, noch überraschend jung:

Satz 1.17 (Hadwiger-Finsler-Ungleichung, 1937).

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}F + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Beweis. Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$2\sum ab - \sum a^2 \geq 4\sqrt{3}F.$$

Aber $\sum a^2 = (\sum a)^2 - 2\sum ab$, mit Satz 1.15 folgt also

$$2\sum ab - \sum a^2 = 4\sum ab - (\sum a)^2 = 4(4Rr + r^2 + s^2) - 4s^2 = 4r(4R + r).$$

Ferner ist $F = rs$ und wir erhalten die äquivalente Form

$$4R + r \geq \sqrt{3}s,$$

was der 5. Ungleichung in Satz 1.16 entspricht.

□

6 Übungen

Zu Abschnitt 1.

Übung 1 (A 441031). Sei $ABCD A' B' C' D'$ ein Würfel mit der Kantenlänge 1. Auf seiner Kante BC liegt ein Punkt J mit $3 \cdot CJ = BC$, auf der Kante $A'D'$ liegt ein Punkt M mit $3 \cdot A'M = A'D'$. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks MDJ .

Übung 2 (Zu Seitenhalbierenden). Der Mittelpunkt von BC sei M . Dann hat die Seitenhalbierende AM die Länge

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Übung 3 (Zu Winkelhalbierenden). Die Halbierende des Winkels bei A schneide BC in D . Dann hat AD die Länge

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)}.$$

Entsprechende Aussagen gelten natürlich für die anderen Winkelhalbierenden.

Übung 4. Man beweise, dass jede der nachstehenden Bedingungen äquivalent dazu ist, dass $\triangle ABC$ gleichschenkelig ist:

(i) Zwei Höhen sind gleichlang.

(ii) Zwei Seitenhalbierende sind gleichlang.

(iii) Zwei Winkelhalbierende sind gleichlang (**Satz von Steiner-Lehmus**).

Zu Abschnitt 2.

Übung 5 (A 391044). Das Dreieck ABC sei rechtwinklig bei A . Dann gilt $F = yz$.

Übung 6 (Baltic Way 2015). Im $\triangle ABC$ schneiden die innere und die äußere Winkelhalbierende von $\angle BAC$ die Gerade BC in D bzw. E . Sei F der zweite Schnittpunkt der Geraden AD mit dem Umkreis des $\triangle ABC$. Weiterhin sei O der Umkreismittelpunkt des $\triangle ABC$ und D' der Spiegelpunkt von D an O . Beweisen Sie, dass $\angle D'FE = 90^\circ$.

Übung 7 (A 591235). Sei H der Höhenschnittpunkt in $\triangle ABC$. Man beweise, dass die Umkreisradien der Dreiecke $\triangle ABH$, $\triangle BCH$ und $\triangle CAH$ sämtlich gleich groß sind.

Übung 8 (IMO 1989/2). In einem spitzwinkligen Dreieck ABC schneidet die Winkelhalbierende des Winkels bei A den Umkreis des Dreiecks zum zweiten Mal in A_1 . Entsprechend werden Punkte B_1 und C_1 definiert. Sei A_0 der Schnittpunkt der Geraden AA_1 mit den Außenwinkelhalbierenden der Winkel bei B und C . Entsprechend werden Punkte B_0 und C_0 definiert. Man beweise:

- (i) Die Fläche von $\Delta A_0 B_0 C_0$ ist doppelt so groß wie die Fläche des Sechsecks $AC_1 B A_1 C B_1$.
(ii) Die Fläche von $\Delta A_0 B_0 C_0$ ist mindestens viermal so groß wie die Fläche von ΔABC .

Zu Abschnitt 3.

Übung 9 (A 441345). Es seien r der Radius der Inkugel und r_1, r_2, r_3, r_4 die Radien der vier Ankugeln eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders $ABCD$. Man beweise, dass stets gilt

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}.$$

Übung 10 (Baltic Way 2015). Im ΔABC sei D der Fußpunkt der Höhe von B auf AC , wobei $AB = 1$ gilt. Der Inkreismittelpunkt von ΔBCD ist zugleich der Schwerpunkt von ΔABC . Bestimmen Sie die Längen von AC und BC .

Übung 11 (A 171235). Ist u der Umfang von ΔABC , so gilt:

$$R > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}.$$

Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar $R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$.

Übung 12 (A 371043). Einer Halbkugel mit Radius R werde ein Tetraeder $ABCD$ so einbeschrieben, dass die Eckpunkte A, B, C auf der Peripherie der Grundfläche der Halbkugel liegen und D im Scheitelpunkt der Halbkugel liegt. Das Volumen des Tetraeders sei mit V , der Umfang des Dreiecks ABC mit u bezeichnet. Weisen Sie nach, dass dann stets gilt:

$$V \leq \frac{u^3}{324} \tag{4}$$

Unter welchen Voraussetzungen gilt in (4) das Gleichheitszeichen?

Zu Abschnitt 5.

Übung 13 (IMO 1983/6). *Man beweise: Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, so gilt*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

In welchen Fällen tritt Gleichheit ein?

Übung 14.

$$\sum a(s-a) \leq 9Rr.$$

2 Klassiker

Wir setzen unsere Reise mit der Besichtigung mehrerer Hochburgen der elementaren Geometrie fort.

1 Die Sätze von Menelaos und Ceva

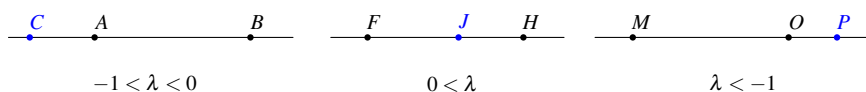
Die im kommenden Abschnitt vorgestellten Resultate haben sich einerseits von jeher als mächtige Werkzeuge in der Wettbewerbsgeometrie erwiesen, zum anderen öffnen sie gleichsam ein Tor zu vielen tiefliegenden und überraschenden Sätzen. Wir wollen ein paar Vorbereitungen treffen und zunächst das *Teilverhältnis* dreier kollinearere Punkte definieren:

Definition 2.1. Für drei verschiedene kollineare Punkte A, B, T nennen wir die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{TB}$$

das *Teilverhältnis*, in dem das Punktepaar A, B von T geteilt wird, und schreiben $\lambda = t(A, B; T)$.

Hierbei wird also die Lage der Punkte A, B, T auf der gemeinsamen Geraden g zueinander berücksichtigt. Im Falle $A \prec T \prec B$ durchläuft $\lambda = t(A, B; T)$ alle positiven Werte und es gilt $\lambda = \frac{AT}{TB}$.



Liegt T nicht zwischen A und B , so gilt $\lambda = -\frac{AT}{TB}$. Ferner können nun zwei Situationen auftreten: Falls $T \prec A \prec B$, so ist $-1 < \lambda < 0$, und falls $A \prec B \prec T$, so gilt $\lambda < -1$. Wir halten also fest:

- Die Lage von T auf der Geraden ist durch das Teilverhältnis $\lambda = t(A, B; T)$ eindeutig bestimmt.

- Durchläuft T die Menge $g \setminus \{A, B\}$, so läuft das Teilverhältnis λ durch die Wertemenge $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

Das Teilverhältnis einbeziehend können wir nun einen auf *Menelaos* zurückgehenden Satz wie folgt formulieren:

Satz 2.1 (Menelaos). *Gegeben sei ein Dreieck ABC sowie drei auf den Geraden AB, BC und CA liegende Punkte D, E und F , die von den Eckpunkten A, B, C verschieden sein mögen. Unter diesen Voraussetzungen sind die Punkte D, E, F genau dann kollinear, wenn*

$$t(A, B; D) \cdot t(B, C; E) \cdot t(C, A; F) = -1. \quad (5)$$

Beweis. „ \implies “ Die Punkte D, E, F mögen auf einer gemeinsamen Geraden g liegen und seien von A, B, C verschieden. Dann sind genau eines oder alle drei der Teilverhältnisse in (5) negativ. Deshalb genügt es

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \quad (6)$$

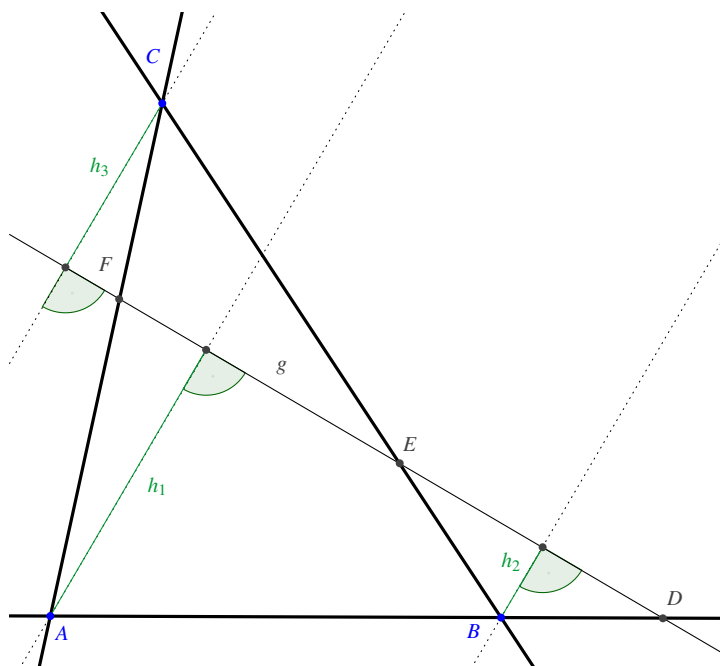
zu beweisen. Hierfür fallen wir die Lote von den Eckpunkten A, B, C auf g ; ihre Längen seien h_1, h_2 und h_3 , respektive. Da die Lote paarweise parallel sind, folgt nach dem 2. Strahlensatz in den Zentralpunkten D, E, F angewandt:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{h_1}{h_2}, \quad \frac{BE}{EC} = \frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{CF}{FA} = \frac{h_3}{h_1}.$$

Aufmultiplizieren dieser Gleichungen ergibt

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{h_3}{h_1} = 1$$

also genau die Behauptung (6).



„ \Leftarrow “ Seien nun von A, B, C verschiedene Punkte $D \in AB, E \in BC$ und $F \in CA$ gegeben, welche die Beziehung (5) erfüllen. Wir haben zu zeigen, dass D, E, F kollinear sind. Dazu bedienen wir uns eines nützlichen Prinzips, nämlich der Nutzung von *Phantompunkten*:

Zunächst überlegen wir uns, dass $D' := EF \cap AB$ existiert. In der Tat, wäre $EF \parallel AB$, so erhielten wir mit dem 1. Strahlensatz $t(B, C; E) \cdot t(C, A; F) = 1$ und mit (5) hieraus $t(A, B; D) = -1$. Dies aber ist unmöglich. Weiter muss D' von A, B und offenbar auch von C verschieden sein. Nach dem bereits Bewiesenen, auf die Transversale durch D', E und F angewandt, folgt also

$$t(A, B; D') \cdot t(B, C; E) \cdot t(C, A; F) = -1.$$

Division dieser Gleichung durch die Voraussetzung (5) und Umstellen liefert

$$t(A, B; D') = t(A, B; D).$$

Da ein Punkt auf AB durch sein Teilverhältnis eindeutig bestimmt ist, gilt also $D' = D$. Mithin hat der Punkt D auch die Eigenschaften von D' und es liegen D, E, F auf einer gemeinsamen Geraden. \square

Typischerweise wird der *Satz von Menelaos* in der Form angewendet, dass eine Transversale g gegeben ist und die verlängerten Seiten AB, BC und CA des

Dreiecks ABC schneidet. Wir haben dann mit (6) die perfekte Gleichung zum Weiterarbeiten. In dieser Weise sind wir nun auch imstande, ein Kriterium für das Schneiden dreier Geraden in einem Punkt zu beweisen. Es ist dies der *Satz von Ceva*:

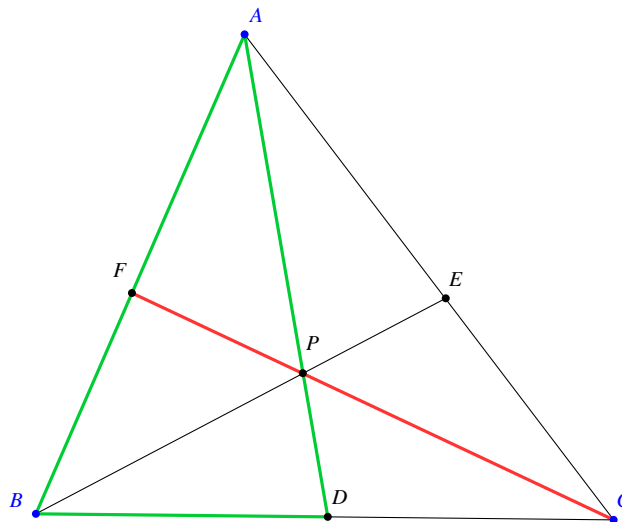
Satz 2.2 (Ceva). *Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie drei im Inneren der Seiten BC, CA und AB gelegene Punkte D, E und F . Unter dieser Voraussetzung schneiden sich die Geraden AD, BE und CF genau dann in einem Punkt, d.h. sie sind kopunktal, wenn*

$$t(A, B; F) \cdot t(B, C; D) \cdot t(C, A; E) = 1 \quad (7)$$

oder äquivalent

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \quad (8)$$

Beweis. „ \implies “ Die Geraden AD, BE und CF mögen sich im Punkt P schneiden. Wende den Satz von Menelaos auf $\triangle ABD$ und die Transversale durch F, P, C an. Dies ergibt



$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1.$$

Wenden wir Menelaos andererseits auf $\triangle ADC$ und die Transversale durch B, P, E an, so folgt

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Nach seitenweiser Multiplikation beider Gleichungen und Kürzen verbleibt

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

also genau die Beziehung (8).

„ \Leftarrow “ Wir setzen umgekehrt die Gültigkeit von (7) voraus. Die Geraden BE und CF schneiden sich in einem Punkt P innerhalb von $\triangle ABC$, daher ist $D' := CP \cap AB$ ein innerer Punkt der Strecke AB und mit diesem die Geraden AD', BE und CF kopunktal. Nach vorigem Teil folgt also

$$t(A, B; F) \cdot t(B, C; D') \cdot t(C, A; E) = 1.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch die Voraussetzung (7), so liefert das nach Umstellen

$$t(B, C; D') = t(B, C; D)$$

und somit $D' = D$. Also sind die Geraden AD und AD' identisch, weshalb AD, BE und CF kopunktal sind. \square

Für den Teil „ \Rightarrow “ des *Satzes von Ceva* gibt es auch einen sehr schönen Beweis, der mit Flächenmethoden arbeitet und den wir jetzt vorstellen.

Beweis (Satz von Ceva „ \Rightarrow “, Variante 2). Die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ADC$ stimmen in ihren Höhen überein, die Flächeninhalte verhalten sich demnach wie die Grundseiten zueinander:

$$\frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{BD}{DC}$$

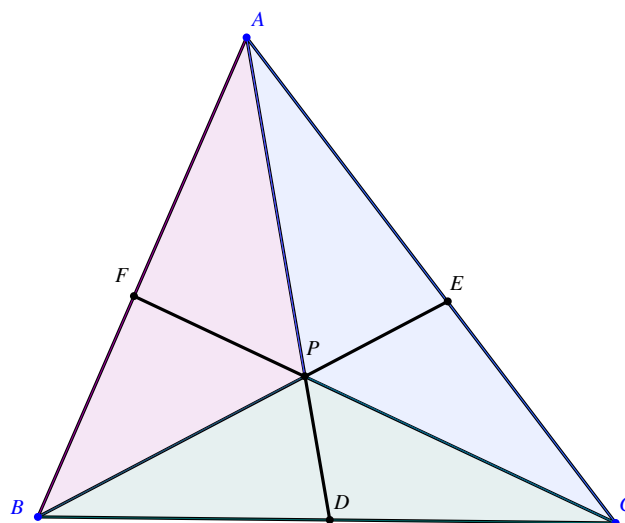
Gleiches gilt für die Dreiecke $\triangle PBD$ und $\triangle PDC$, d.h. auch

$$\frac{[PBD]}{[PDC]} = \frac{BD}{DC}$$

Der Trick ist nun, wann immer zwei gleiche Brüche gegeben sind, *stehen die Summe der Zähler und die Summe der Nenner - sofern $\neq 0$ - wieder in diesem Verhältnis!*¹ Hier bilden wir die Differenz obiger Gleichungen und erhalten

$$\frac{[APB]}{[APC]} = \frac{[ABD] - [PBD]}{[ADC] - [PDC]} = \frac{BD}{DC}.$$

¹Weiteres dazu in Übung 15.



Analog ergibt sich

$$\frac{[BPC]}{[APB]} = \frac{CE}{EA}, \quad \frac{[APC]}{[BPC]} = \frac{AF}{FB}.$$

Multiplizieren wir diese drei Gleichungen miteinander, so folgt schließlich

$$1 = \frac{[APB]}{[APC]} \cdot \frac{[BPC]}{[APB]} \cdot \frac{[APC]}{[BPC]} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}.$$

□

Zu guter Letzt führen wir einen trigonometrischen Beweis für Teil „ \implies “ des Satzes von Ceva. Dieser wird eine zu (8) äquivalente Formel produzieren, welche in Wettbewerben mitunter von Nutzen ist.

Beweis (Satz von Ceva „ \implies “, Variante 3). Nehmen wir an, die Geraden AD , BE und CF schneiden sich in einem Punkt P . Anwendung des Sinussatzes auf $\triangle ACF$ ergibt

$$\frac{AF}{FC} = \frac{\sin \angle ACF}{\sin A}$$

Ebenso ergibt sich in $\triangle BCF$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{\sin \angle FCB}{\sin B}.$$

Division dieser Gleichungen führt auf

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} \cdot \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Entsprechend erhalten wir

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} \cdot \frac{\sin A}{\sin C},$$

und durch Multiplikation dieser drei Beziehungen miteinander zeigt sich

$$\begin{aligned} \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} &= \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} \cdot \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} \cdot \frac{\sin A}{\sin C} \\ &= \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} \\ &= \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle EBA} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle FCB} \\ &= \frac{AP}{CP} \cdot \frac{BP}{AP} \cdot \frac{CP}{BP} \\ &= 1, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt den Sinussatz in den Dreiecken APC , BPA sowie CPB zum Einsatz gebracht haben. \square

Mit den farbig markierten Winkeln in unten stehender Abbildung ist die Beziehung (8) also äquivalent dazu, dass die Sinusprodukte der grünen und roten Winkel gleich sind. Wir halten dies im folgenden Satz fest:

Satz 2.3 (Ceva, Trigonometrische Version). *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 gilt: Die Geraden AD , BE und CF schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn*

$$\sin \angle ACF \sin \angle BAD \sin \angle CBE = \sin \angle FCB \sin \angle DAC \sin \angle EBA. \quad (9)$$

2 Menelaos' Gefolge

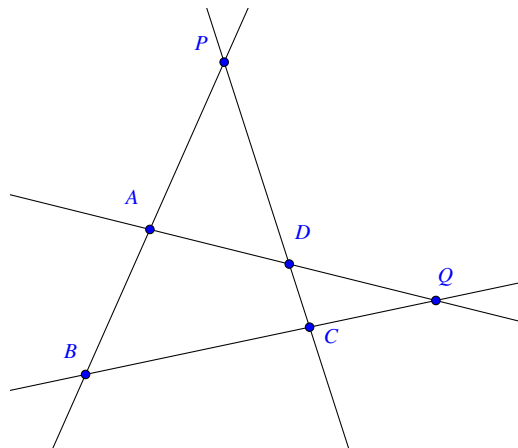
Die Sätze von Menelaos und Ceva besitzen vielfältige spannende Anwendungen, denen wir uns nun zuwenden wollen. Zunächst ein kleines Lemma über Vierseite:

Lemma 2.1. Sei $ABCD$ ein Viereck derart, dass die Schnittpunkte $P := AB \cap CD$ und $Q := BC \cap AD$ existieren und die Punkte P und Q den Seiten AD bzw. CD zugewandt sind. Dann gilt

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PC} \cdot \frac{QD}{QC}$$

oder äquivalent

$$\frac{PA \cdot PC}{PB \cdot PD} = \frac{QA \cdot QC}{QB \cdot QD}.$$



Beweis. Wir wenden den Satz von Menelaos zweimal an. Für $\triangle PBC$ mit Transversale QA erhalten wir:

$$\frac{PA}{AB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{CD}{PD} = 1.$$

Für $\triangle PAD$ mit Transversale QB dagegen ergibt sich:

$$\frac{PB}{AB} \cdot \frac{QA}{QD} \cdot \frac{CD}{PC} = 1.$$

Seitenweise Division dieser Gleichungen führt auf

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QA} \cdot \frac{QD}{QC} \cdot \frac{PC}{PD} = 1,$$

was nach Umstellen die Behauptungen zeigt. \square

3 Übungen

Zu Abschnitt 1.

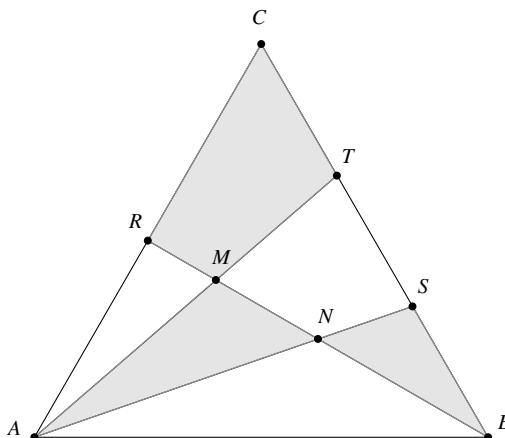
Übung 15 (Verhältnisse). (a) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ mit $\lambda := \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gegeben. Man zeige: Sofern die Brüche definiert sind, gilt auch $\frac{a+c}{b+d} = \lambda$ und $\frac{a-c}{b-d} = \lambda$. Weiter folgere man, dass $\frac{a-c}{a+c} = \frac{b-d}{b+d}$ gilt.

(b) Es seien Brüche $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \dots \leq \frac{a_n}{b_n}$ in aufsteigender Reihenfolge gewählt, wobei $a_i, b_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Man beweise, dass dann

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}. \quad (10)$$

Für $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ folgt hieraus insbesondere $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_n}{b_n}$.

Übung 16 (A 431036). Im Entwurf für ein Logo der Vereinigung „Innovative Mathematik“ bilden die getönten Flächen die stilisierten Buchstaben I und M (siehe Abbildung). Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge $a = 6$ cm, AC wird von T halbiert und BC von S und T in drei gleich große Teile geteilt. Welchen Anteil an der Dreiecksfläche überdecken die stilisierten Buchstaben zusammen?



Übung 17. Man beweise:

(a) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC schneiden einander im Schwerpunkt S des Dreiecks. Dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1.

(b) Die Schwerlinien eines Tetraeders $ABCD$, das sind die Verbindungslinien der Ecken zum Schwerpunkt der jeweils gegenüberliegenden Seitenfläche, schneiden einander im Schwerpunkt T des Tetraeders. Dieser teilt jede Schwerlinie im Verhältnis $3 : 1$.

Übung 18 (Ceva-Quickies). Beweise mithilfe des Satzes von Ceva, dass die folgenden besonderen Linien des Dreiecks ABC einander in einem Punkt schneiden:

- (a) die Seitenhalbierenden.
- (b) die Winkelhalbierenden.
- (c) die Höhen.

Übung 19 (IMO 1982/5). Die Diagonalen AC und CE des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ werden respektive von den inneren Punkten M und N geteilt, so dass

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r.$$

Man bestimme r , falls B, M und N kollinear sind.

Übung 20 (A 391243). Über ein Dreieck $\triangle ABC$ werde vorausgesetzt, dass in seinem Innern ein Punkt O liegt, für den alle drei Winkel $\angle BAO, \angle CBO, \angle ACO$ die Größe 30° haben. Man zeige, dass das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Zu Abschnitt 2.

Übung 21. Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen gegenüberliegende Seiten nicht parallel sind, und $P := AB \cap CD$ sowie $Q := AD \cap BC$. Die Winkelhalbierende von $\angle DPA$ schneide die Strecken BC und DA in den Punkten E bzw. G . Die Winkelhalbierende von $\angle AQB$ schneide die Strecken AB und CD in den Punkten H bzw. F .

- (a) (A 571232) Man zeige, dass das Viereck $EFGH$ ein Rhombus ist.
- (b) Man beweise, dass $AC \parallel FG$ und $BD \parallel EF$ gilt.

Intermezzo: Originelle Probleme

Übung 22 (A 441045). *Innerhalb eines Parallelogramms $ABCD$ liege ein Punkt P mit $\angle BAP = \angle PCB$. Man zeige, dass dann auch $\angle PDC = \angle CPB$ gilt.*

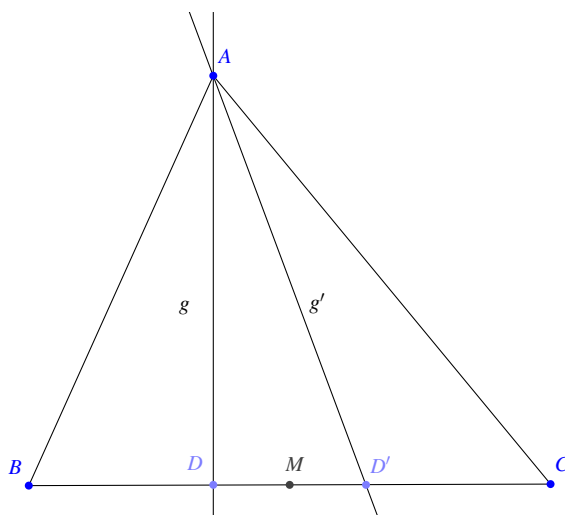
Zusatzproblem: Es liege P so außerhalb des Parallelogramms $ABCD$, wie in der rechten Figur zu sehen ist. Man zeige: Ist $\angle PBC = \angle PDC$, so gilt auch $\angle DPA = \angle CPB$.

3 Abbildungsgeometrie

1 Bewegungen

2 Isotomische und Isogonale Konjugation

Zwei interessante Abbildungen, die wir nunmehr vorstellen wollen, sind die *isotomische* und die *isogonale Konjugation*. Sei hierfür ABC ein Dreieck und g eine Ecktransversale durch A , welche die Strecke BC im inneren Punkt D schneide. Die *isotomische* Gerade zu g ist dann die Transversale g' durch A und denjenigen Punkt D' der Strecke BC , für welchen $BD' = CD$ gilt.

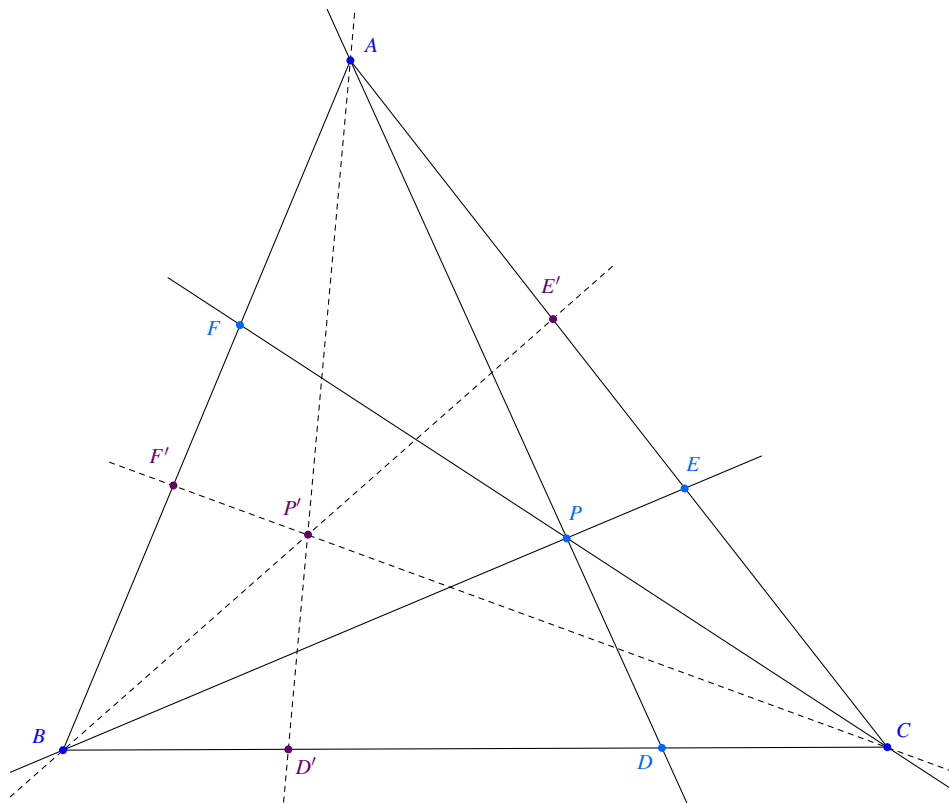


Der Punkt D' geht also aus D durch Spiegelung am Mittelpunkt M der Seite BC hervor. Ferner ist $BD' = CD \Leftrightarrow CD' = BD$ und deshalb haben wir, wenn wir $t(B, C; D) = \lambda$ schreiben, $t(B, C; D') = \frac{1}{\lambda}$. Sind also - wie im Satz von Ceva - AD, BE und CF drei Ecktransversalen und AD', BE', CF' ihre isotomischen Geraden, so gilt

$$t(A, B; F) \cdot t(B, C; D) \cdot t(C, A; E) = 1 \iff t(A, B; F') \cdot t(B, C; D') \cdot t(C, A; E') = 1$$

weshalb die Voraussetzung (7) des Satzes von Ceva für die Transversalen AD, BE und CF genau dann erfüllt ist, wenn sie für ihre Isotomischen erfüllt ist. Wir haben den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.1 (Isotomisch konjugierte Geraden). Seien D, E, F innere Punkte der Strecken BC, CA und AB . Die Ecktransversalen AD, BE, CF schneiden sich genau dann in einem Punkt P , wenn die isotomisch Konjugierten AD', BE', CF' sich in einem Punkt P' schneiden.



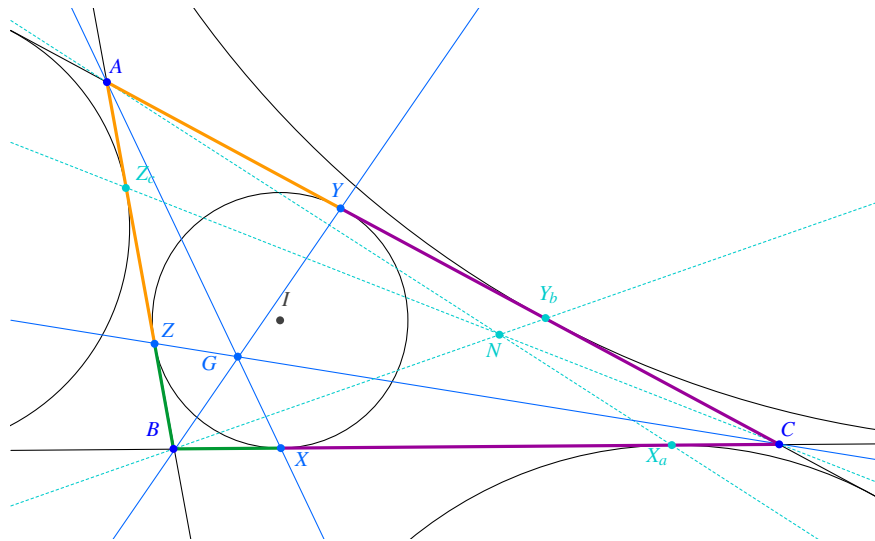
Bezeichne $\mathcal{D} := \varepsilon \setminus \{A, B, C\}$; jeder Punkt $P \in \mathcal{D}$ bestimmt ein Tripel sich in P schneidender Ecktransversalen. Der Schnittpunkt P' der isotomisch konjugierten Transversalen heißt zu P *isotomisch konjugierter Punkt*. Auf die Weise ist eine *isotomische Konjugation* $\kappa : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ definiert. Offenkundig ist κ eine Involution, d.h. es gilt $\kappa^2(P) = P$ für jeden Punkt $P \in \mathcal{D}$.

Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ist offenbar zu sich selbst konjugiert. Ein Beispiel für zwei zueinander isotomisch konjugierte Punkte sind wir dank des *Inkreis-Ankreis-Theorems* aus Kapitel 1 schnell imstande anzugeben: Wir betrachten die Berührungspunkte X, Y, Z des Inkreises des ΔABC mit dessen Seiten BC, CA, AB einerseits und respektive die Berührungspunkte X_a, Y_b, Z_c der Ankreise des ΔABC andererseits. Nach Satz 1.9 liegen diese Punkte in Paaren symmetrisch zu den Mittelpunkten der Seiten des Dreiecks, folglich sind AX, BY, CZ und AX_a, BY_b, CZ_c

isotomisch konjugierte Geraden. Mit den vertrauten Bezeichnungen $x = s - a$, $y = s - b$ und $z = s - c$ erhalten wir

$$t(A, B; Z) \cdot t(B, C; X) \cdot t(C, A; Y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$$

und damit nach Satz 2.2, dass AX, BY und CZ in der Tat kopunktal sind.



Der Schnittpunkt dieser drei Transversalen heißt *Gergonne-Punkt* und ist in unserer Abbildung mit G bezeichnet. Die isotomisch konjugierten Geraden durch die Ankreisberührungspunkte sind gemäß des zuvor bewiesenen Satzes 3.1 ebenfalls kopunktal. Ihr Schnittpunkt wird *Nagel-Punkt* genannt und ist in der Abbildung der Punkt N . Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 3.2. *Die Ecktransversalen durch die Inkreisberührungspunkte und die Ecktransversalen durch die Ankreisberührungspunkte sind jeweils kopunktal. Ihre Schnittpunkte heißen respektive Gergonne-Punkt und Nagel-Punkt und sind isotomisch konjugiert zueinander.*

3 Übungen

Zu Abschnitt 2.

Übung 23. ² Seien I der Inkreismittelpunkt, I_κ dessen isotomisch konjugierter Punkt, S der Schwerpunkt sowie G und N der Gergonne-Punkt bzw. der Nagel-Punkt. Man zeige:

- (a) Die Punkte I, S und N sind kollinear.
- (b) Die Punkte G, N und I_κ sind kollinear.

²Lsg. noch nicht notiert.

4 Lösungen

1 Lösungen Kapitel 1

Übung 1

Lösung. Offenbar ist $CJ = A'M = \frac{1}{3}$. Weiter sind $\triangle CJD$ und $\triangle DMD'$ rechtwinklig, also nach Pythagoras $DJ = \frac{1}{3}\sqrt{10}$, $DM = \frac{1}{3}\sqrt{13}$ und MJ als Raumdiagonale in einem Teilquader hat die Länge $MJ = \frac{1}{3}\sqrt{19}$. Aus der Herleitung der Heron-Formel haben wir für ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c die alternative Formel

$$[MDJ]^2 = \frac{1}{16} (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2).$$

Mit $a = DJ$, $b = DM$, $c = MJ$ erhalten wir

$$[MDJ]^2 = \frac{1}{16 \cdot 81} (-10^2 - 13^2 - 19^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13 + 2 \cdot 13 \cdot 19 + 2 \cdot 19 \cdot 10) = \frac{7}{18}$$

und damit $[MDJ] = \sqrt{\frac{7}{18}} \approx 0.623$. □

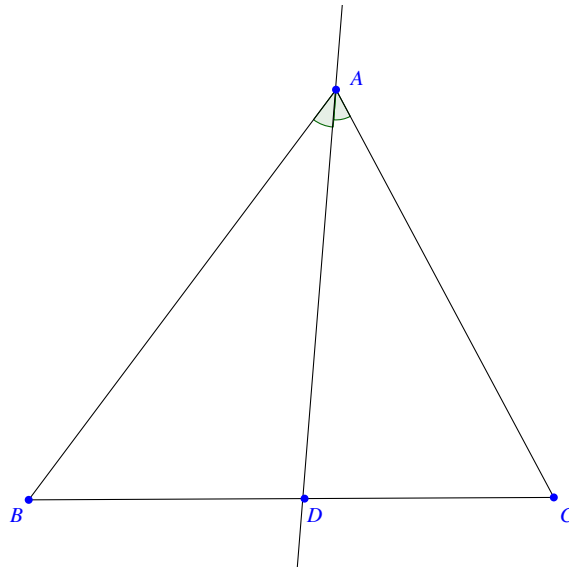
Übung 2

Lösung. Wende den *Satz von Stewart* auf die Transversale AM an. Mit $m = BM = \frac{a}{2}$, $n = MC = \frac{a}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a \left(m_a^2 + \frac{a^2}{4} \right) &= \frac{a}{2} (b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow m_a^2 &= \frac{1}{2} (b^2 + c^2) - \frac{a^2}{4} \\ \Leftrightarrow m_a &= \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \end{aligned}$$

□

Übung 3



Lösung. Aus $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ folgt $\frac{BD}{a} = \frac{BD}{BD+DC} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c}$ und $DC = \frac{ab}{b+c}$. Der Satz von Stewart liefert daher

$$a \left(l_a^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \right) = b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} + c^2 \cdot \frac{ab}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow l_a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c)}{b+c}$$

und folglich

$$l_a^2 = bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} = bc \cdot \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$= bc \cdot \frac{4s(s-a)}{(b+c)^2}$$

$$\Rightarrow l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)}.$$

□

Übung 4

Lösung. Alle Teilprobleme lassen sich - mit zunehmendem Schwierigkeitsgrad - rein geometrisch lösen. Besonders die 1840 von C. Lehmus gestellte und erstmals von Jakob Steiner gelöste Aufgabe (iii) hat seither viel Faszination auf die Geometer ausgeübt. Anstelle rein geometrischer Beweise führen wir aber jeweils

kurze rechnerische; damit soll auch die Einsetzbarkeit der bisher bewiesenen Resultate unterstrichen werden.

Zu (i): Wir betrachten etwa b und c als Grundseiten, dann gilt

$$h_b = h_c \Leftrightarrow \frac{2F}{b} = \frac{2F}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow b = c.$$

Zu (ii): Nach Übung 3 ist $m_b = m_c$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 2c^2 - b^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2 \\ \Leftrightarrow 3b^2 &= 3c^2 \\ \Leftrightarrow b &= c. \end{aligned}$$

Zu (iii): Gemäß Übung 2 ist $l_b = l_c$ äquivalent mit

$$\begin{aligned} \frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)} &= \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)} \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 c(s-b) &= (a+c)^2 b(s-c). \end{aligned}$$

Ab hier empfiehlt es sich, zwecks Ausklammern den Faktor $(b-c)$ zu suchen. Wir formen um zu

$$\begin{aligned} (a+b)^2(sc-bc) - (a+c)^2(sb-bc) &= 0 \\ \Leftrightarrow [(a+c)^2 - (a+b)^2]bc + cs(a+b)^2 - bs(a+c)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a+b+c)(c-b)bc + a^2s(c-b) + bcs(b-c) &= 0 \\ \Leftrightarrow (c-b)[bc(2a+b+c) + a^2s - bcs] &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Wegen $2a+b+c = 2s+a$ ist der hintere Faktor in (11) identisch mit

$$bc(2s+a) + a^2s - bcs = abc + a^2s + bcs > 0$$

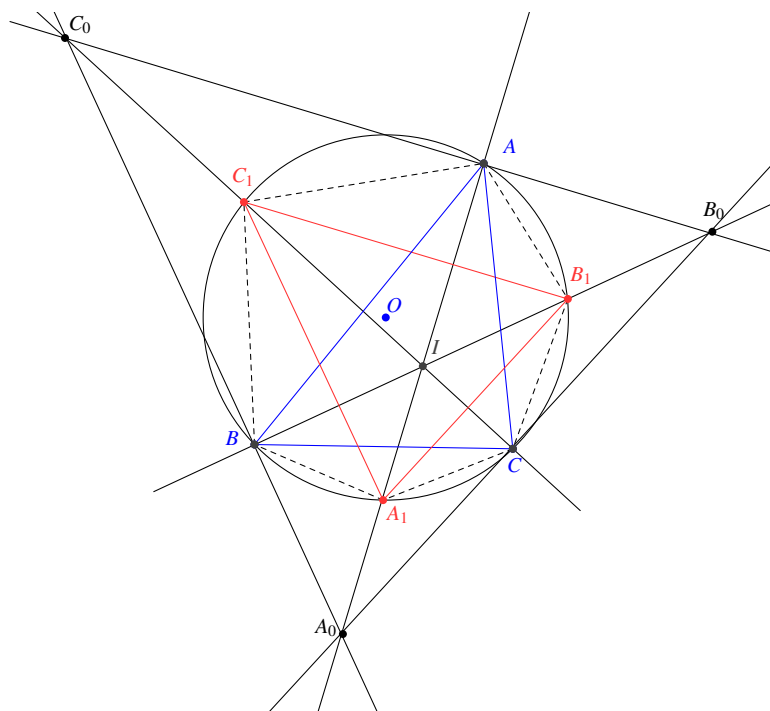
und folglich kann (11) nur erfüllt sein, solange $b = c$ gilt. □

Übung 5

Lösung. Dies folgt aus $F = \frac{1}{2}bc$ und

$$\begin{aligned} yz = (s-b)(s-c) &= \frac{1}{4}(a+c-b)(a+b-c) \\ &= \frac{1}{4}((a^2 - (b-c)^2)) = \frac{1}{4}\left(\underbrace{a^2 - b^2 - c^2}_{=0} + 2bc\right) = \frac{1}{2}bc. \end{aligned}$$

□



Lösung. Sei I der Inkreismitelpunkt von $\triangle ABC$. Nach Satz 1.9 sind A_1, B_1 und C_1 die Mittelpunkte der Strecken IA_0, IB_0 und IC_0 .

Zu (i): Die von I durch die Eckpunkte $AB_1CA_1BC_1$ des Sechsecks ausgehenden Strahlen zerlegen sowohl dieses als auch das Dreieck $A_0B_0C_0$ in je sechs Teildreiecke. Wir paaren die Dreiecke beider Zerlegungen. Ein solches Paar von Teildreiecken sind $\triangle AIB_1$ und $\triangle AIB_0$. Wegen $IB_0 = 2IB_1$ gilt $[AIB_0] = 2[AIB_1]$. Entsprechende Relationen gelten für die anderen Paare. Addition aller sechs Gleichungen liefert $[A_0B_0C_0] = 2[AB_1CA_1BC_1]$.

Zu (ii): Die zentrische Streckung an I mit Faktor 2 überführt $\triangle A_1B_1C_1$ in $\triangle A_0B_0C_0$, folglich gilt $[A_0B_0C_0] = 4[A_1B_1C_1]$ und es genügt, $[A_1B_1C_1] \geq [ABC]$ zu zeigen. Gemäß Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1A_1A + \angle AA_1C_1 = \angle B_1BA + \angle ACC_1 = \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$$

und analog

$$\angle C_1B_1A_1 = \frac{A}{2} + \frac{C}{2}, \quad \angle A_1C_1B_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}.$$

Bedenken wir nun, dass $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ denselben Umkreis haben! Mit Satz

1.5, der AGM-Ungleichung und der Jensenschen Ungleichung schließen wir auf

$$\begin{aligned}
 [ABC] &= 2R^2 \sin A \sin B \sin C \\
 &= 2R^2 \sqrt{\sin A \sin B} \sqrt{\sin B \sin C} \sqrt{\sin C \sin A} \\
 &\leq 2R^2 \frac{\sin A + \sin B}{2} \cdot \frac{\sin B + \sin C}{2} \cdot \frac{\sin C + \sin A}{2} \\
 &\leq 2R^2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \sin\left(\frac{C+A}{2}\right) \\
 &= [A_1 B_1 C_1].
 \end{aligned}$$

Dabei ist zu bedenken, dass $\sin : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ nichtnegativ und wegen $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$ mithin konkav ist. \square

Übung 10

Lösung. Wir verwenden die Abkürzungen $F_1 = [ABC]$, $F_2 = [ABD]$, $F_3 = [ACD]$ und $F_4 = [BCD]$ für die Inhalte der Seitenflächen und $V = [ABCD]$ für das Tetraedervolumen. Es seien I und I_4 die Mittelpunkte der Inkugel und der die Seite BCD berührenden Ankugel. Dann kann $ABCD$ zerlegt werden in die Teiltetraeder $ABCI$, $ABDI$, $ACDI$ und $BCDI$, also gilt

$$V = \frac{1}{3}r \cdot \sum_{i=1}^4 F_i.$$

Der aus $ABCD$ und $BCDI_4$ zusammengesetzte Körper kann zerlegt werden in die drei Tetraeder $ABCI_4$, $ABDI_4$, $ACDI_4$, folglich gilt

$$[ABCD] = [ABCI_4] + [ABDI_4] + [ACDI_4] - [BCDI_4]$$

und daher

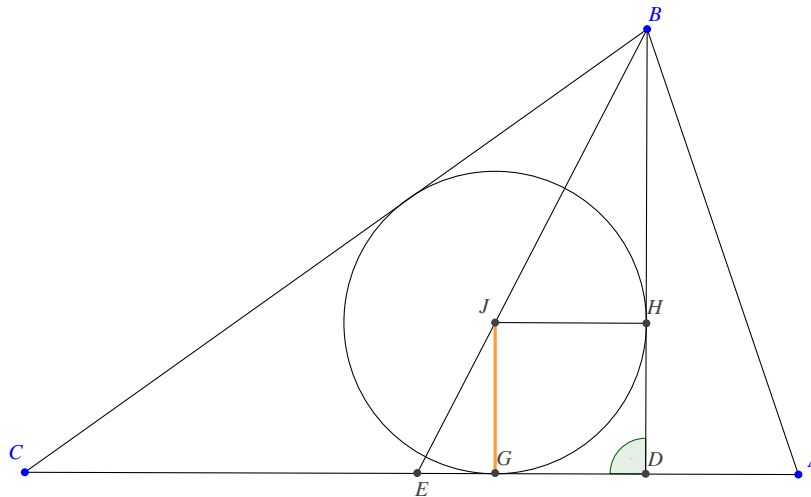
$$V = \frac{1}{3}r_4 \cdot (F_1 + F_2 + F_3 - F_4) = \frac{1}{3}r_4 \cdot \left(-2F_4 + \sum_{i=1}^4 F_i\right).$$

Entsprechende Formeln gelten offenbar für die Radien r_1, r_2, r_3 . Nun folgt

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i} = \frac{1}{3V} \cdot \sum_{i=1}^4 \left(-2F_i + \sum_{j=1}^4 F_j\right) = \frac{1}{3V} \cdot 2 \sum_{i=1}^4 F_i = \frac{2}{r},$$

was den Beweis abschließt. \square

Übung 11



Lösung (mit einer Idee von Jonas Walter). Seien J der Inkreismittelpunkt von $\triangle BCD$, G, H die Berührungspunkte des Inkreises von $\triangle BCD$ mit den Seiten CD bzw. BD , E der Mittelpunkt von AC sowie $p = CD, h = BD$ und r der Inkreisradius von $\triangle BCD$. Offenbar müssen die Punkte A, D, G, E, C in dieser Reihenfolge auf AC liegen. Nach Voraussetzung sind Winkelhalbierende und Seitenhalbierende durch C identisch, also $AC = BC$. Wegen $\angle BDC = 90^\circ$ ist $DHJG$ ein Quadrat, also haben wir $DG = DH = r$. Zudem ist J Schwerpunkt von $\triangle ABC$, weshalb bekanntlich $\frac{BJ}{JE} = \frac{1}{2}$ gilt. Der 1. Strahlensatz liefert nun

$$\frac{1}{3} = \frac{JE}{BE} = \frac{HD}{BD} = \frac{r}{h} \Rightarrow r = \frac{h}{3}.$$

Wegen $DG = r$ folgt hieraus

$$\frac{h}{3} = DG = \frac{p+h-a}{2} \Leftrightarrow h = 3(a-p).$$

Nach der Flächenformel ist andererseits

$$\begin{aligned} \frac{hp}{2} = [BCD] &= \frac{(a+p+h)}{2} \cdot r = \frac{(a+p+h)}{2} \cdot \frac{h}{3} \\ \Leftrightarrow h &= 2p - a. \end{aligned}$$

Gleichsetzen dieser Resultate ergibt $3(a-p) = 2p - a \Leftrightarrow p = \frac{4}{5}a$ und damit $h = \frac{3}{5}a$ sowie $AD = b - p = a - p = \frac{1}{5}a$. Der Satz von Pythagoras im $\triangle BAD$ zeigt

schließlich

$$1 = AD^2 + h^2 = \frac{1}{25}a^2 + \frac{9}{25}a^2 = \frac{10}{25}a^2 \Leftrightarrow a = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Wir erhalten also $AC = BC = \frac{\sqrt{10}}{2}$. □

Übung 12

Lösung. *Variante 1:* Wir quadrieren die Ungleichung zunächst und erhalten die äquivalente Form

$$3R^2 > ur. \tag{12}$$

Es gelten die offenkundigen Abschätzungen $2R \geq a$, $2R \geq b$, $2R \geq c$, jedoch mindestens eine davon streng. Hieraus folgt durch Addition $6R > a + b + c = u$. Multiplikation mit der *Eulerschen Ungleichung* $R \geq 2r$ ergibt:

$$6R^2 > 2ur$$

und nach Division durch 2 schließlich (12).

Im Fall eines o.B.d.A. bei C rechtwinkligen $\triangle ABC$ reicht die Eulersche Ungleichung nicht, um die stärkere Ungleichung

$$2R^2 \geq ur \tag{13}$$

zu beweisen. Nach der Flächenformel gilt aber $F = rs = \frac{1}{2}ab \Leftrightarrow ab = 2rs = ur$. Nach den Sätzen von Pythagoras und Thales ist andererseits $a^2 + b^2 = c^2 = 4R^2$. Gemeinsam folgt nun

$$ur = ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 2R^2,$$

also (13), mit Gleichheit genau für ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck. □

Es bietet sich alternativ ein analytischer Zugang. Hier können wir sehr kraftvolle Methoden zum Einsatz bringen, wie z.B. die *Jensensche Ungleichung*.

Variante 2: Wir beweisen wiederum (12) und (13), bringen diesmal aber die Flächenformeln aus den Sätzen 1.5 und 1.11 sofort zum Einsatz: Wegen

$$ur = 2F = 4R^2 \cdot \sin A \sin B \sin C$$

kann (12) äquivalent umgeformt werden zu

$$\sin A \sin B \sin C < \frac{3}{4}. \quad (14)$$

Da der Sinus auf $I = (0, \pi)$ positiv und wegen $\sin''(x) = -\sin(x) < 0$ zudem streng konkav auf I ist, folgt nach der Ungleichung von Jensen und der AGM-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sin A \sin B \sin C &\leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^3 \\ &\leq \left[\sin \left(\frac{A+B+C}{3} \right) \right]^3 \\ &= \sin^3 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Entsprechend kann (13) umgeformt werden zu

$$\sin A \sin B \sin C < \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Setzen wir o.B.d.A. $\angle C = 90^\circ$ voraus und beachten, dass $\angle B = 90^\circ - \angle A$, so sehen wir

$$\sin A \sin B \sin C = \sin A \sin \left(\frac{\pi}{2} - A \right) = \sin A \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A \leq \frac{1}{2},$$

was zu beweisen war. Gleichheit gilt wieder genau, falls ΔABC gleichschenkelig-rechtwinklig ist. \square

Übung 13

Lösung. Nach Konstruktion ist $d(D, \varepsilon(ABC)) = R$ und das ΔABC hat den Umkreisradius R . Mit der Formel für das Pyramidenvolumen, der Flächenformel aus Satz 1.5 und der AGM-Ungleichung erhalten wir

$$V = \frac{1}{3}R \cdot [ABC] = \frac{1}{3}R \cdot \frac{abc}{4R} = \frac{1}{12}abc \leq \frac{1}{12} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 = \frac{u^3}{324}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b = c$, also ΔABC gleichseitig ist. \square

Übung 14

Lösung. Wir setzen die Ravi-Substitution ein und formen dann unter Beachtung der zyklischen Summen weiter um, wobei $x, y, z > 0$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\text{cyc}} a^2 b(a-b) \geq 0 &\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} c^2 a(c-a) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (x+y)^2 (y+z)(x-z) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (2xy^3 - 2x^2yz) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} xy^3 \geq \sum_{\text{cyc}} x^2yz \\
 &\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{y^2}{z} \geq \sum_{\text{cyc}} x \tag{*}
 \end{aligned}$$

Wenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die positiven Vektoren

$$\vec{v} = \left(\frac{y}{\sqrt{z}}, \frac{z}{\sqrt{x}}, \frac{x}{\sqrt{y}} \right)^t, \quad \vec{w} = (\sqrt{z}, \sqrt{x}, \sqrt{y})^t$$

an, so zeigt das andererseits

$$(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = \left(\sum_{\text{cyc}} x \right)^2 \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{y^2}{z} \cdot \sum_{\text{cyc}} x = |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2.$$

Dies ist nach Division durch $\sum x > 0$ gerade (*), womit die Ungleichung bewiesen ist. Gleichheit in (*) ist äquivalent dazu, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{v} = \lambda \vec{w}$. Das impliziert

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \implies (\lambda^3 - 1)y = 0$$

und wegen $y > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ muss $\lambda = 1$, demnach $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$, also das Dreieck gleichseitig sein. In diesem Falle steht das Gleichheitszeichen trivialerweise und damit genau für gleichseitige Dreiecke. \square

Übung 15

Lösung (nach Russelle Guadalupe). Es gilt $\sum a^2 = (\sum a)^2 - 2\sum ab = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr$ gemäß Satz 1.15 und folglich

$$\sum a(s-a) = \sum (as - a^2) = 2s^2 - \sum a^2 = 2s^2 - (2s^2 - 2r^2 - 8Rr) = 8Rr + 2r^2.$$

Die Ungleichung ist also äquivalent zu

$$8Rr + 2r^2 \leq 9Rr \Leftrightarrow 2r^2 \leq 2Rr \Leftrightarrow 2r \leq R$$

und letzteres ist die *Eulersche Ungleichung*.

□

2 Lösungen Kapitel 2

Übung 15

Lösung. (a) Nach Voraussetzung gilt $a = \lambda b$, $c = \lambda d$, deshalb ist

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{\lambda b + \lambda d}{b+d} = \frac{\lambda(b+d)}{b+d} = \lambda \quad \text{und} \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{\lambda b - \lambda d}{b-d} = \frac{\lambda(b-d)}{b-d} = \lambda.$$

Zusammen folgt weiter $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{a+c} = \frac{b-d}{b+d}$.

(b) Wegen $a_i, b_i > 0$ gelten die Ungleichungen

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_i}{b_i} \iff a_1 b_i \leq a_i b_1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Summation dieser Ungleichungen liefert

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots + a_1 b_n &\leq a_1 b_1 + a_2 b_1 + \dots + a_n b_1 \\ \Leftrightarrow a_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_n) &\leq b_1 (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

und nach Division durch $b_1(b_1 + b_2 + \dots + b_n) > 0$ ergibt sich

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Durch Vergleich aller Brüche $\frac{a_i}{b_i}$ mit $\frac{a_n}{b_n}$ wird analog die rechte Ungleichung gezeigt. Man beachte schließlich, dass im Fall $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ die untere und obere Schranke von (10) identisch sind und somit Gleichheit erzwungen wird. \square

Übung 16

Lösung. Wir führen die Bezeichnungen $M := AT \cap BR$ und $N := AS \cap BR$ sowie \mathcal{G} für die getönte Fläche ein. Zunächst überlegen wir, dass gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= [CRMT] + [AMN] + [BSN] \\ &= ([CRMT] + [BSN] + [MNST]) - [MNST] + [AMN] \\ &= [BCR] - ([MNST] + [AMN]) + 2[AMN] \\ &= [BCR] - [AST] + 2[AMN]. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $CR = \frac{a}{2}$ und $ST = \frac{a}{3}$, weshalb $[BCR] = \frac{1}{2}[ABC]$ und $[AST] = \frac{1}{3}[ABC]$ gilt. Damit erhalten wir für die getönte Fläche

$$\mathcal{G} = \frac{1}{6}[ABC] + 2[AMN]. \quad (16)$$

Mittels *Satz von Menelaos* können wir von den vorgegebenen Teilungsverhältnissen auf dem Rand auf die inneren Teilverhältnisse schließen! Angewandt auf ΔATC und die Transversale durch R, M, B folgt etwa

$$\frac{AM}{MT} \cdot \frac{TB}{BC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AM}{MT} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{AM}{MT} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{AM}{AT} = \frac{3}{5}.$$

Dies verwenden wir in ΔAST mit derselben Transversale weiter und bekommen

$$\frac{AN}{NS} \cdot \frac{SB}{BT} \cdot \frac{TM}{MA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AN}{NS} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{AN}{NS} = 3 \Leftrightarrow \frac{AN}{AS} = \frac{3}{4}.$$

Hieraus folgt nun

$$[AMN] = \frac{AM}{AT} \cdot \frac{AN}{AS} \cdot [AST] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} [ABC] = \frac{3}{20} [ABC]$$

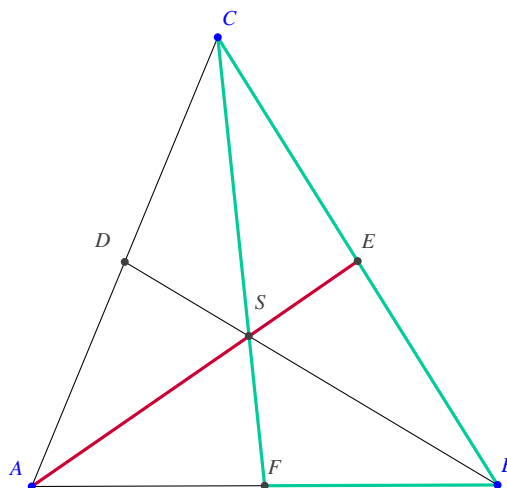
und schlussendlich mit (16)

$$\mathcal{G} = \frac{1}{6} [ABC] + 2 \cdot \frac{3}{20} [ABC] = \frac{7}{15} [ABC].$$

Der Anteil der getönten Fläche am gesamten Dreieck beträgt also $\frac{7}{15}$. □

Übung 17

Lösung. Zu (a):



Sei zunächst $S := AE \cap CF$. Dann sind A, S, E kollinear und der Satz von Menelaos im Dreieck CFB gibt

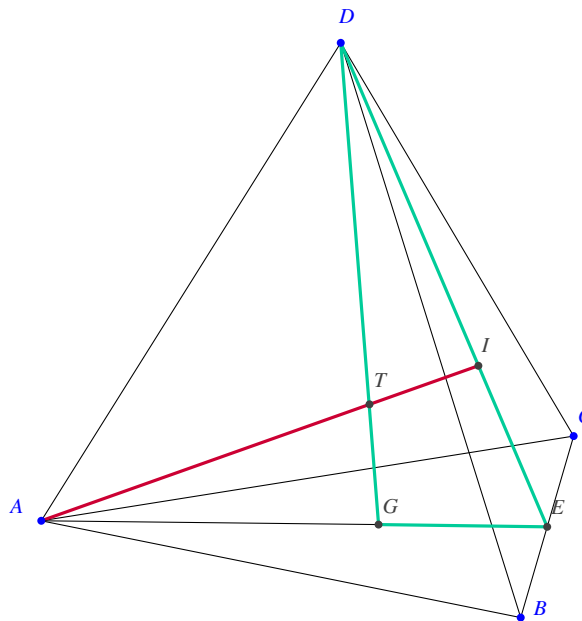
$$\frac{CS}{SF} \cdot \frac{FA}{AB} \cdot \frac{BE}{EC} = 1 \Leftrightarrow \frac{CS}{SF} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow t(C, F; S) = \frac{CS}{SF} = \frac{2}{1}$$

Wählen wir andererseits $S' := BD \cap CF$, so erhalten wir mit Menelaos im Dreieck CAF und der Transversalen durch B, S', D ganz ähnlich

$$t(C, F; S') = \frac{CS'}{S'F} = \frac{2}{1}.$$

Da die Lage eines Punktes auf CF durch sein Teilverhältnis eindeutig bestimmt ist und $t(C, F; S) = t(C, F; S')$ gilt, folgt $S = S'$. Mithin schneiden sich die Seitenhalbierenden im Punkt S und dieser teilt CF im Verhältnis $2 : 1$. Durch Umbezeichnung der Eckpunkte folgt der zweite Teil der Aussage für AE und BD .

Zu (b):



Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung. Sei $\varepsilon = \varepsilon(AED)$, dann folgt $AE, DE \subset \varepsilon \Rightarrow G, I \in \varepsilon$ und damit $DG, AI \subset \varepsilon$. Da G, I innere Punkte der Strecken

AE bzw. DE sind, schneiden sich DG und AI in einem Punkt $T \in \varepsilon$. Mithin sind A, T, I kollinear und der Satz von Menelaos in $\triangle DGE$ ergibt, eingedenk Teil (a),

$$\frac{DT}{TG} \cdot \frac{GA}{AE} \cdot \frac{EI}{ID} = 1 \Leftrightarrow \frac{DT}{TG} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow t(D, G; T) = \frac{DT}{TG} = \frac{3}{1}.$$

Auch die anderen Schwerlinien treffen DG und teilen sie im Verhältnis $3 : 1$. Aus Gleichheit der Teilverhältnisse folgt analog (a), dass sich alle Schwerlinien in T treffen und ferner T jede Schwerlinie im Verhältnis $3 : 1$ teilt. \square

Übung 18

Lösung. Wir bezeichnen die Teilungspunkte auf den Seiten a, b, c jeweils mit D, E, F .

Zu (a): Da D, E, F die Seitenmitten sind, gilt

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Zu (b): Die Punkte D, E, F teilen nach Übung 2 die Dreiecksseiten im Verhältnis der anliegenden Seiten. Damit folgt

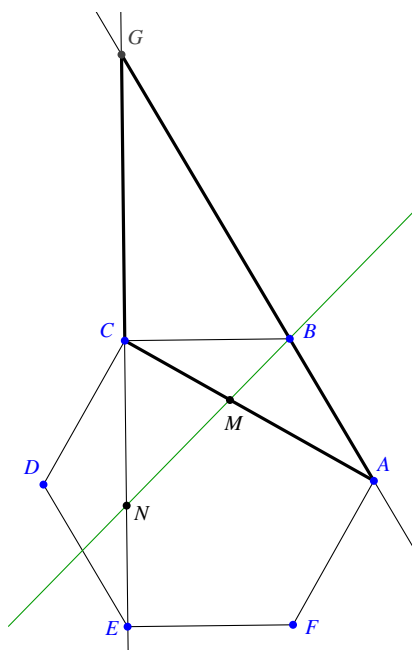
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1.$$

Zu (c): O.B.d.A. sei $\triangle ABC$ spitzwinklig. Der Fall eines rechtwinkligen $\triangle ABC$ ist trivial und falls etwa $\angle C > 90^\circ$, vertausche man C und den Schnittpunkt H der Höhen auf a und b . Das Dreieck ABH ist dann spitzwinklig. – Da Höhe und Grundseite senkrecht aufeinander stehen, folgt nun

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b \cos A}{a \cos B} \cdot \frac{c \cos B}{b \cos C} \cdot \frac{a \cos C}{c \cos A} = 1.$$

\square

Übung 19

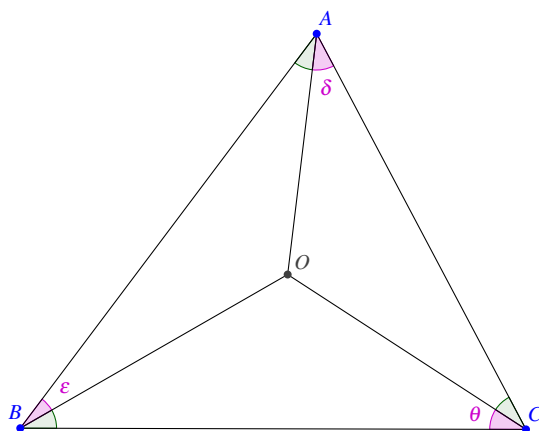


Lösung. Der Schnittpunkt der Geraden CE und AB heiße G . Seien nun B, M, N kollinear und o.B.d.A. $AB = 1$. Dann ist $AC = CE = CG = \sqrt{3}$ und $BG = 2$. Wenden wir den Satz von Menelaos in $\triangle AGC$ auf die Transversale durch B, M, N an, folgt mit leichter Rechnung, dass

$$\frac{AB}{BG} \cdot \frac{GN}{NC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{r}\right) \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} = 3$$

und damit $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sein muss. □

Übung 20



Lösung. Dies ist eine versteckte Anwendung des Trigonometrischen Ceva: Wir schreiben kurz $\delta = \angle OAC$, $\varepsilon = \angle OBA$, $\theta = \angle OCB$. Dann gilt $\delta + \varepsilon + \theta = 90^\circ$. Nach Satz 2.3 ist

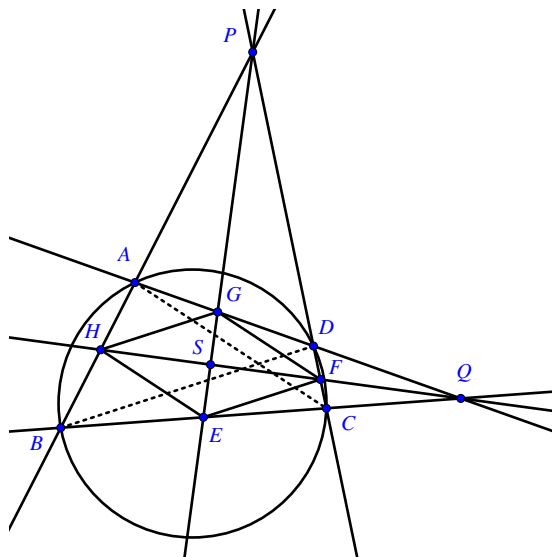
$$\frac{1}{8} = (\sin 30^\circ)^3 = \sin \delta \sin \varepsilon \sin \theta. \quad (17)$$

Andererseits ist $\sin : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ positiv und wegen $\sin''(x) = -\sin(x) < 0$ streng konkav, sodass nach der AGM-Ungleichung und der Jensen'schen Ungleichung gilt:

$$\sin \delta \sin \varepsilon \sin \theta \leq \left(\frac{\sin \delta + \sin \varepsilon + \sin \theta}{3} \right)^3 \leq \sin^3 \left(\frac{\delta + \varepsilon + \theta}{3} \right) = (\sin 30^\circ)^3 = \frac{1}{8}.$$

In unserer Abschätzung müssen wegen (17) aber die Gleichheitsbedingungen erfüllt sein. Bei der Jensen-Ungleichung impliziert das $\delta = \varepsilon = \theta$ und mithin sind $\delta, \varepsilon, \theta$ sämtlich 30° groß, also $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$. Damit ist $\triangle ABC$ gleichseitig. \square

Übung 21



Lösung. Zunächst beobachten wir, dass die Eckpunkte A, B, C und D so umbenannt werden können, dass P der Seite AD und Q der Seite CD zugewandt ist, wobei die Winkelhalbierenden von $\angle DPA$ und $\angle AQB$ als auch das Viereck $EFGH$ fest bleiben. Sofern (a) gilt, bleibt auch die Gültigkeit der Aussage in (b) von der

Umbeschriftung unberührt.

Zu (a): Es sei $S := EG \cap FH$ sowie $\psi := \angle HQA$. Nach Voraussetzung ist dann auch $\angle CFQ = \angle BQH = \psi$. Weil $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\angle QCD = 180^\circ - \angle DCB = \angle BAD$. Hieraus und den Innenwinkelsummen in den Dreiecken $\triangle AHQ$ und $\triangle CFQ$ folgt nun

$$\begin{aligned}\angle FHP = \angle QHA &= 180^\circ - \angle HAQ - \psi = 180^\circ - \angle BAD - \psi \\ &= 180^\circ - \angle QCD - \psi = 180^\circ - \angle QCF - \angle CFQ \\ &= \angle CFQ = \angle PFH.\end{aligned}$$

Das Dreieck $\triangle PFH$ ist also gleichschenkelig mit Basis FH . Weil $\angle DPA$ und $\angle FPH$ denselben Winkel bezeichnen, stimmt daher die Winkelhalbierende PS des Winkels $\angle DPA$ mit der Mittelsenkrechten von FH überein. Weil E und G auf PS liegen, gilt somit

$$EF = EH \quad \text{und} \quad GF = GH. \quad (18)$$

Analog führt die Voraussetzung $\angle BPE = \angle EPC$ dazu, dass $\triangle QEG$ gleichschenkelig ist mit Basis EG , sodass QS als Halbierende von $\angle BQA$ gleichzeitig Mittelsenkrechte von EG ist. Wegen $F \in QS$ folgt nun $FE = FG$. Zusammen mit (18) zeigt dies, dass alle Seiten des Vierecks $EFGH$ gleichlang sind. Also ist $EFGH$ ein Rhombus.

Zu (b): Wir betrachten die folgenden Seitenverhältnisse:

$$a := \frac{AG}{GD}, \quad a_1 := \frac{CF}{FD}, \quad b := \frac{CE}{EB} \quad \text{und} \quad b_1 := \frac{AH}{HB}.$$

Unser Ziel ist, $a = a_1$ und $a_1 = b$ nachzuweisen, hieraus folgen $AC \parallel FG$ und $BD \parallel EF$ mit der Umkehrung des 1. Strahlensatzes. Als Strategie benutzen wir Satz 1.4 über Winkelhalbierende, er gestattet uns den „Transport“ der Verhältnisse in das äußere Vierseit: Nach Satz 1.4 und dem Sekantensatz gilt

$$a = \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} = b \quad \text{sowie} \quad a_1 = \frac{QC}{QD} = \frac{QA}{QB} = b_1. \quad (19)$$

Satz 1.4 in Kombination mit Lemma 2.1 besagt andererseits

$$ab = \frac{PA \cdot PC}{PD \cdot PB} = \frac{QA \cdot QC}{QB \cdot QD} = a_1 b_1. \quad (20)$$

Aus (19) und (20) erhalten wir jetzt $a^2 = ab = a_1 b_1 = a_1^2$, also $a = a_1$ und damit auch $b = a_1$. \square

3 Lösungen Kapitel 3

Übung 23

A Grundlagen

1 Kongruenz und Ähnlichkeit

Im folgenden betrachten wir eine Ebene ε und bijektive, d.h. umkehrbare, Abbildungen $\varphi : \varepsilon \rightarrow \varepsilon$ der Ebene auf sich selbst. In der ebenen Geometrie spielt das Studium solcher Abbildungen und ihrer Eigenschaften eine große Rolle. Ein erstes Beispiel ist die Gruppe \mathcal{K} der *Kongruenzabbildungen*. Hierzu zählen alle Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen sowie Verkettungen davon. Lassen wir außerdem zentrische Streckungen zu, erhalten wir die Gruppe \mathcal{A} der *Ähnlichkeitsabbildungen*. Offenbar ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$.

Definition A.1. Zwei Figuren $F, F' \subseteq \varepsilon$ heißen kongruent, falls es eine Kongruenzabbildung $\varphi \in \mathcal{K}$ gibt mit $\varphi(F) = F'$, und ähnlich, falls es eine Ähnlichkeitsabbildung $\psi \in \mathcal{A}$ gibt mit $\psi(F) = F'$.

Wir schreiben \cong für die Kongruenz- und \sim für die Ähnlichkeitsrelation. Die Abbildungen $\varphi \in \mathcal{K}$ sind längentreu und winkeltreu, dagegen sind die Abbildungen $\psi \in \mathcal{A}$ bloß längenverhältnistreu und winkeltreu; die Winkeltreue zentrischer Streckungen ergibt sich dabei aus den Strahlensätzen (Satz A.1 und A.2).

Sind also zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle XYZ$ kongruent, so stimmen sie in *allen entsprechenden Seiten und Winkeln* überein. Hinreichend für Kongruenz sind umgekehrt die folgenden Übereinstimmungen:

Theorem A.1 (Kongruenzsätze). Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle XYZ$ sind kongruent, wenn einer der folgenden Größensätze übereinstimmt:

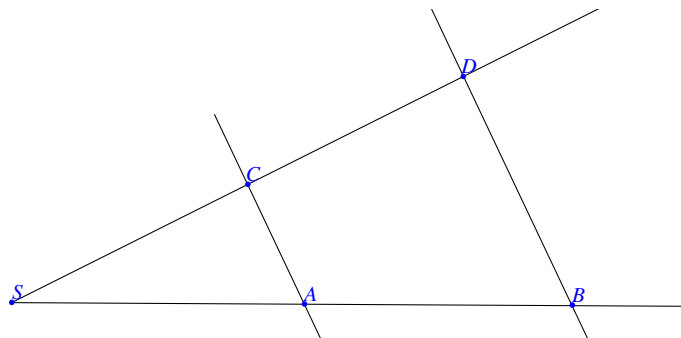
- (i) drei Seiten (sss)
- (ii) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (sws)
- (iii) eine Seite und die anliegenden Winkel (wsw)
- (iv) zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel (SsW)

Ganz entsprechende Resultate erhalten wir im Falle der Ähnlichkeit: Sind zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle XYZ$ einander ähnlich, so stimmen *alle Verhältnisse entsprechender Seiten und die Winkel* überein. Hinreichende Bedingungen für die Ähnlichkeit sind:

Theorem A.2 (Ähnlichkeitssätze). Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle XYZ$ sind ähnlich, wenn einer der folgenden Größensätze übereinstimmt:

- (i) drei Seitenverhältnisse (sss)
- (ii) zwei Seitenverhältnisse und der eingeschlossene Winkel (sws)
- (iii) zwei Winkel (Hauptähnlichkeitssatz)
- (iv) zwei Seitenverhältnisse und der der jeweils größeren Seite gegenüberliegende Winkel (SsW)

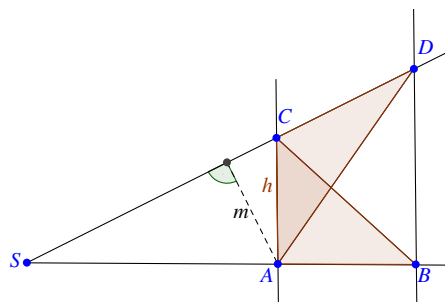
Die oben stehenden Theoreme gestatten uns schon recht viele Hebel in einer geometrischen Aufgabe anzusetzen. Das erste, also Theorem A.1, wollen wir hier als gültig anerkennen. Für den Beweis des zweiten aus dem ersten braucht man dann nur, dass zentrische Streckungen winkeltreu sind. Zu diesem Zweck werden üblicherweise die auch für sich schon interessanten Strahlensätze herangezogen, welche wir hier präsentieren. Dafür betrachten wir nachfolgend zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt S , die von zwei Geraden in den von S verschiedenen Punkten A, B, C und D geschnitten werden.



Satz A.1 (1. Strahlensatz).

$$AC \parallel BD \iff \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD}.$$

Beweis. „ \implies “ 1. Schritt: Wir setzen $AC \parallel BD$ voraus und schreiben $s = \overline{SA}$. Zunächst gelte $s \perp AC$ und damit auch $s \perp BD$. Seien dann $h = AC$ und $m = d(A, SC)$.



Wegen $s \perp AC$ ist ΔSAC rechtwinklig und daher

$$[SAC] = \frac{h \cdot SA}{2} = \frac{m \cdot SC}{2}$$

Wegen $AC \parallel BD$ stimmen andererseits ΔABC und ΔADC in Grundseite h und Höhe dazu überein, sind also flächengleich. Addieren wir die Fläche $[SAC]$ hinzu, so folgt $[SBC] = [SAD]$ und mithin

$$\frac{h \cdot SB}{2} = [SBC] = [SAD] = \frac{m \cdot SD}{2}$$

Dividieren wir die beiden Gleichungen seitenweise, so folgt

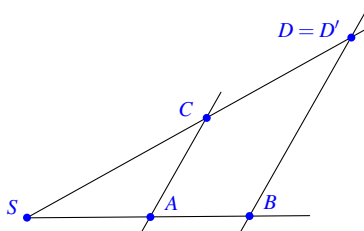
$$\frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD}. \quad (\star)$$

2. Schritt: Im allgemeinen Fall betrachten wir das Lot von S auf die Parallelen AC bzw. BD . Die Lotfußpunkte seien mit E respektive F bezeichnet. Anwendung von (\star) auf die Figuren $SABEF$ und $SCDEF$ liefert

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SE}{SF} = \frac{SC}{SD}$$

und damit die Behauptung.

„ \Leftarrow “ Für die umgekehrte Richtung arbeiten wir mit einem *Phantompunkt*:



Gelte also $\frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD}$ mit $D \in \overline{SC}$. – Wir konstruieren D' als Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch B mit dem Strahl \overline{SC} . Nach dem bereits Bewiesenen gilt dann

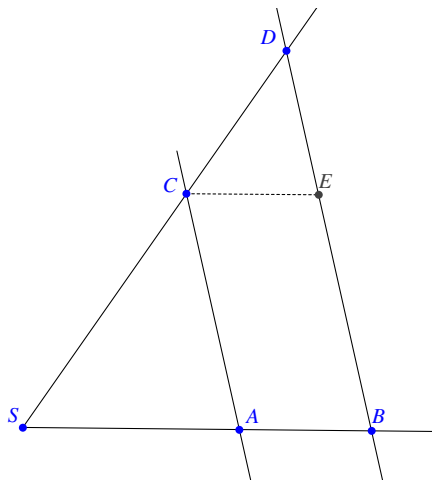
$$\frac{SC}{SD'} = \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD} \implies SD = SD'$$

und wegen $D, D' \in \overline{SC}$ schließlich $D = D'$. Mithin sind die Geraden BD und BD' identisch; zusammen mit $BD' \parallel AC$ bedeutet das also $AC \parallel BD$. \square

Satz A.2 (2. Strahlensatz).

$$AC \parallel BD \implies \frac{SA}{SB} = \frac{AC}{BD}.$$

Beweis. Wir zeichnen eine Parallele zu SA durch C , welche BD in E schneiden möge. Wegen $AB \parallel CE$ sowie $AC \parallel BE$ nach Voraussetzung ist das Viereck $ABCE$ ein Parallelogramm und deshalb $AC = BE$.

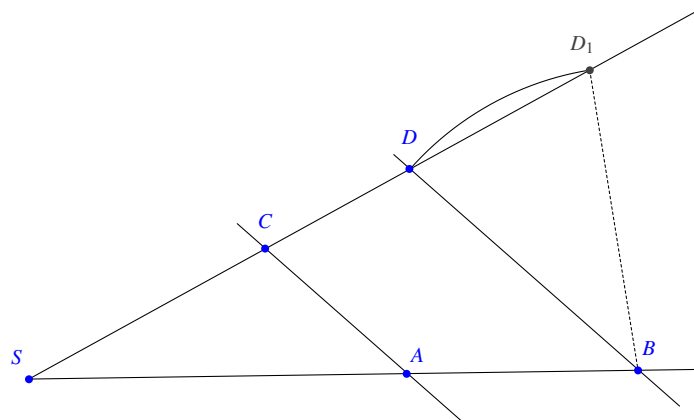


Zusammen mit dem 1. Strahlensatz, den wir nacheinander mit S und D im Zentrum anwenden, erhalten wir nun

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD} = \frac{BE}{BD} = \frac{AC}{BD}.$$

□

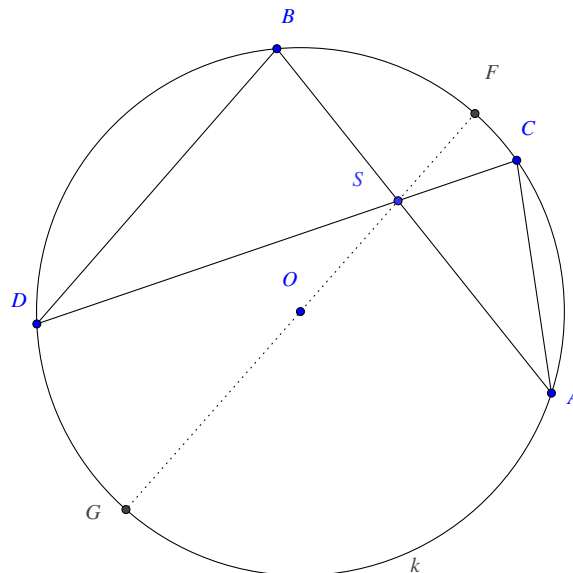
Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes aber ist falsch. Sei hierfür (A, B, C, D) ein Quadrupel mit $AC \parallel BD$, welches zudem die Einschränkungen $BD \not\parallel SD$ und $\angle D > \angle S$ erfülle. In dieser Situation schneidet der Kreis $k(B, BD)$ den Strahl SD in einem weiteren Punkt D_1 , sodass $BD = BD_1$. Aufgrund des 2. Strahlensatzes erfüllt nun das Quadrupel (A, B, C, D_1) die Gleichung $\frac{SA}{SB} = \frac{AC}{BD_1}$, allerdings ist $AC \not\parallel BD_1$.



Das Zusammenspiel der Ähnlichkeitssätze mit Winkelsätzen am Kreis liefert uns drei wertvolle weitere Aussagen, die nun vorgestellt werden sollen.

Satz A.3 (Sehnensatz). Sei $k = k(O, r)$ ein Kreis und S ein Punkt innerhalb des Kreises. Durch S mögen zwei Geraden verlaufen, die k in den Punkten A und B bzw. C und D schneiden. Dann gilt

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD = r^2 - SO^2.$$



Beweis. Gemäß Peripheriewinkelsatz ist $\angle BAC = \angle BDC$ und $\angle DBA = \angle DCA$, also gilt $\triangle ACS \sim \triangle DBS$ nach dem Hauptähnlichkeitssatz. Hieraus folgt

$$\frac{SA}{SC} = \frac{SD}{SB} \iff SA \cdot SB = SC \cdot SD.$$

Als spezielle Sehne wählen wir nun den Durchmesser durch S , der den Kreis k in den Punkten F und G schneide. Nach dem eben Bewiesenen ist dann

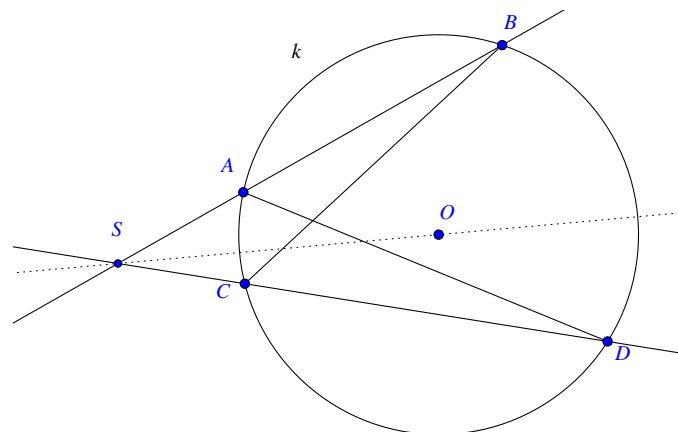
$$SA \cdot SB = SF \cdot SG = (r + SO)(r - SO) = r^2 - SO^2,$$

was die zweite Gleichheit zeigt. □

Die Aussage des Sehnensatzes ist also, dass bei Fixierung eines Punktes S innerhalb von k für jede durch S verlaufende Sehne das Produkt der Teilabschnitte, in die S die Sehne teilt, *konstant* ist. Mehr noch: Das „Sehnenprodukt“ hängt nur vom Abstand von S zum Kreismittelpunkt ab! Dasselbe Phänomen tritt bei Sekanten auf und führt schließlich zum Begriff der *Potenz eines Punktes* bezüglich eines festen Kreises.

Satz A.4 (Sekantensatz). Sei $k = k(O, r)$ ein Kreis und S ein Punkt außerhalb des Kreises. Durch S mögen zwei Geraden verlaufen, die k in den Punkten A und B bzw. C und D schneiden. Dann gilt

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD = SO^2 - r^2.$$



Beweis. Der Peripheriewinkelsatz zeigt $\angle SBC = \angle ADS$. Wegen des zusätzlichen gemeinsamen Winkels bei S sind die Dreiecke $\triangle SAD$ und $\triangle SCB$ ähnlich nach dem

Hauptähnlichkeitssatz. Wie beim Sehnensatz folgt

$$\frac{SA}{SC} = \frac{SD}{SB} \iff SA \cdot SB = SC \cdot SD.$$

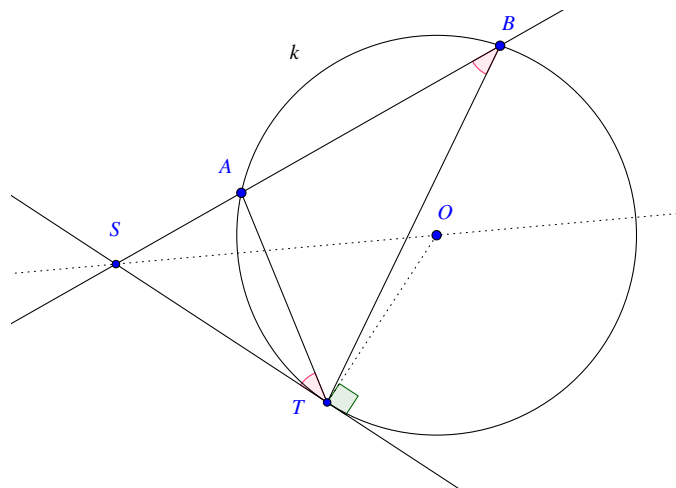
Als spezielle Sekante wählen wir nun die Gerade SO : Nach dem eben Bewiesenen ist dann

$$SA \cdot SB = (SO - r)(SO + r) = SO^2 - r^2,$$

was die zweite Gleichheit zeigt. □

Satz A.5 (Sekanten-Tangenten-Satz). Sei $k = k(O, r)$ ein Kreis und S ein Punkt außerhalb des Kreises. Durch S mögen zwei Geraden verlaufen, die k in den Punkten A und B schneiden bzw. in T berühren. Dann gilt

$$SA \cdot SB = ST^2.$$



Beweis. Nach dem Sehnentangentenwinkelsatz gilt $\angle SBT = \angle ATS$ und wegen des zusätzlichen gemeinsamen Winkels bei S gilt $\triangle SBT \sim \triangle STA$ nach dem Hauptähnlichkeitssatz. Es folgt

$$\frac{SA}{ST} = \frac{ST}{SB} \iff SA \cdot SB = ST^2.$$

□

Wir haben diesen Beweisweg gewählt, weil nun noch ein Beweis für den folgenden Satz abfällt.

Satz A.6 (Pythagoras). Sei $\triangle ABC$ mit den Standardbezeichnungen rechtwinklig bei C , dann gilt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Beweis. Ziehe den Kreis $k = k(A, b)$; wegen $\angle C = 90^\circ$ ist dann BC eine Tangente an k . Aus dem Sekanten-Tangenten-Satz folgt nun

$$a^2 = (c - b)(c + b) = c^2 - b^2$$

und daraus die Behauptung. □

Hoher Wirksamkeit bei geometrischen Problemen erfreuen sich die Umkehrungen der drei gezeigten Sätze über Sehnen, Sekanten und Tangenten. Wir formulieren die Aussagen gebündelt in einem Satz und verweisen zur Anschauung auf die oben stehenden Abbildungen.

Satz A.7 (Umkehrungen der Sätze A.3, A.4 und A.5). Es seien g und h zwei nichtparallele Geraden und S ihr Schnittpunkt.

- (i) Sind $A, B \in g$ und $C, D \in h$ von S verschiedene Punkte, sodass S entweder im Innern beider Strecken AB und CD oder außerhalb dieser beiden Strecken liegt, und gilt $SA \cdot SB = SC \cdot SD$, so liegen A, B, C und D auf einem gemeinsamen Kreis.
(ii) Sind $A, B \in g$ und $C \in h$ von S verschiedene Punkte, sodass S außerhalb der Strecke AB liegt, und gilt $SA \cdot SB = SC^2$, so ist g eine Tangente an den Umkreis von $\triangle ABC$.

Beweis. (i) Wir betrachten den Fall, dass S im Innern beider Strecken AB und CD , also auch innerhalb des Umkreises k von $\triangle ABC$ liegt. Sei D' der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden CD mit k . Insbesondere gilt dann $C \prec S \prec D'$ und die Punkte D und D' liegen bezüglich h auf derselben Seite von S . Aus dem Sehensatz und der Voraussetzung folgt dann

$$SC \cdot SD' = SA \cdot SB = SC \cdot SD \implies SD = SD' \implies D = D'.$$

Daher gilt auch $D \in k$. Den zweiten Fall löst ein analoges Argument.

(ii) O.B.d.A. gelte $S \prec A \prec B$. Aus der Voraussetzung folgt dann $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$. Weil die Dreiecke $\triangle SAC$ und $\triangle SBD$ zudem den Winkel bei S gemeinsam haben, sind sie ähnlich nach dem Kriterium (sws). Mithin gilt $\angle ACS = \angle SBD = \angle ABC$ und nach der Umkehrung des Satzes vom Sehnen tangentialen Winkel ist g Tangente an k . □

Literatur

- [Cox] *Zeitlose Geometrie*, H. S. M. COXETER, S. L. GREITZER
- [Isa] *Geometry for College Students*, MARTIN ISAACS
- [Ma9] *Mathematik Plus Klasse 9*, Verlag Volk und Wissen