Folgen und Reihen

31.03.2017

Folgen

Einstieg: Wir beginnen mit einigen Beispielen für reelle Folgen:

(i) 1, 2, 4, 8, 16, ...

(ii) 4, 2, 6, 3, 7, ...

(iii) 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

(iv) 1, 3, 7, 2, 5, ...

Aufgabe 1: Setzt die Zahlenfolgen logisch fort.

Lösung: Eine mögliche Fortsetzung für die erste Folge ist: 32, 64, 128. Jede Zahl wird jeweils durch Verdopplung der vorigen Zahl erhalten. Wir sprechen von einer geometrischen Folge.
Eine mögliche Fortsetzung der zweiten Folge ist: 3.5, 7.5, 3.75. Die Zahlen werden abwechselnd durch Halbierung der vorigen Zahl bzw. durch Addition von 4 erhalten.
Eine mögliche Fortsetzung für die dritte Folge ist: 8, 13, 21. Man erhält jede Zahl jeweils als Summe der beiden vorangegangenen Zahlen. Diese Folge heißt Fibonacci-Folge.
Die Zahlen der letzten Folge sind zufällig gewählt. Trotzdem könnte man eine logische Fortsetzung konstruieren. Ein Folge kann durch eine endliche Anzahl von Werten nicht eindeutig beschrieben werden und es gibt de facto stets mehrere logische Fortsetzungen. Deshalb benötigen wir eine exakte Definition des Begriffs der reellen Folge und genaue Bildungsvorschriften.

Definition: Eine Folge (a_n) reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (aus den natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen[1]). Jeder natürlichen Zahl n wird also eine reelle Zahl a_n zugeordnet. Die einzelnen Elemente einer Folge werden als Glieder der Folge bezeichnet. a_n ist dabei das Folgeglied zum Index n. Andere gebräuchliche Bezeichnungen für Folgen sind u.a. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Wir müssen mit die Zuordnung nicht zwangsweise bei 0 beginnen. Sei n_0 eine ganze Zahl, dann bezeichnet auch $(a_n)_{n\geq n_0}$ bzw. $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ eine Folge.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine konkrete Folge eindeutig zu definieren. Wir unterscheiden zwischen rekursiven und expliziten Bildungsvorschriften. Wir wollen diese Begriffe am einfachen Beispiel der Folge $(a_n) = (n)$ der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... erklären.
Bei rekursiven Bildungsvorschriften wird jedes Folgeglied durch die Werte eines oder mehrerer voriger Folgeglieder bestimmt. Für das Beispiel ist die rekursive Bildungsvorschrift: $a_n = a_{n-1} + 1$[2]. Damit die Definition eindeutig ist, muss ein Anfangsglied festgelegt werden[3]. Die Folge der natürlichen Zahlen hat das Anfangsglied $a_0 = 0$.
Bei der expliziten Bildungsvorschriften wird jedes Folgeglied in Abhängigkeit von Index angegeben. Für das Beispiel erhalten wir die explizite Bildungsvorschrift: $a_n = n$. Anders als bei der rekursiven Definition muss kein Anfangsglied definiert werden.

Aufgabe 2: Bestimmt die rekursive Bildungsvorschrift der ersten drei Beispielfolgen und die explizite Bildungsvorschrift der ersten Beispielfolge.

---

[1] Wir zählen 0 zu den natürlichen Zahlen.

[2] Folgen bei denen die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Glieder konstant ist, werden arithmetische Folgen genannt.

[3] Für einige Folgen, wie z.B. die Fibonacci-Folge, müssen mehrere Anfangsglieder festgelegt werden.

Die rekursiven Bildungsvorschriften lassen sich in der Regel leichter bestimmen. Dafür haben die expliziten Bildungsvorschriften den Vorteil, dass Glieder der Folge mit hohem Index, z.B. a_{10000}, schneller berechnet werden können, weil man anders als bei den rekursiven Vorschriften nicht alle vorigen Glieder bestimmen muss. Wir wollen die explizite Bildungsvorschrift der Fibonacci-Folge bestimmen.

Fibonacci-Folge: Die Fibonacci-Folge (Beispielfolge (iii)[4]) wurde 1202 von Leonardo Fibonacci verwendet um eine Hasenpopulation zu beschreiben. Dabei ging er von drei Regel für das Wachstum der Population aus:

1. Jedes Paar Kaninchen wirft pro Monat ein weiteres Paar Kaninchen.
2. Ein neugeborenes Paar bekommt erst im zweiten Lebensmonat Nachwuchs.
3. Kein Tier verlässt die Population und keines kommt von außen hinzu.

Die Fibonacci-Folge (f_n) beginnt also im Monat 1 mit einem Paar. Im zweiten Monat bleibt es bei einem Paar. Im dritten Monat gibt es zum ersten Mal Nachwuchs und damit 2 Paare. Im weitereren Verlauf berechnet sich die Population f_{n+1} im neuen Monat n immer als Summe der bereits existierenden Paare f_n im Monat n und des Nachwuchs f_{n-1}, also der Anzahl der Paare im Monat $n-1$, die Nachwuchs bekommen können. Wir erhalten folglich die rekursive Bildungsvorschrift:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Als Anfangswerte legen wir $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ fest. Die Fibonacci-Folge taucht in der Natur auch an vielen anderen Stellen auf.

Es gibt verschiedene Ansätze um die explizite Formel für die Fibonacci-Folge zu bestimmen. Wir wollen dafür Differenzengleichungen nutzen[5]. Als Ansatz betrachten wir die geometrische Folge $a_n = x^n$. Es gilt

$$a_{n+1} - a_n - a_{n-1} = x^{n+1} - x^n - x^{n-1} = (x^2 - x - 1)x^{n-1}.$$

Für $x = 0$ ist die Folge (a_n) trivial. Sie erfüllt zwar die Bildungsvorschrift der Fibonacci-Folge, aber wir können keine nicht-trivialen Anfangswerte erzeugen[6]. Die Folge (a_n) erfüllt die Bildungsvorschrift der Fibonacci-Folge weiterhin für die Nullstellen des Polynoms $x^2 - x - 1$. Die Nullstellen sind

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Wir definieren die Folgen $b_n = (x_1)^n$ und $c_n = (x_2)^n$. Jede Linearkombination $(\alpha b_n + \beta c_n)$ der beiden Folgen mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ erfüllt ebenfalls die Bildungsvorschrift der Fibonacci-Folge, denn es gilt:

$$\alpha b_{n+1} + \beta c_{n+1} = \alpha(b_n + b_{n-1}) + \beta(c_n + c_{n-1}) = (\alpha b_n + \beta c_n) + (\alpha b_{n-1} + \beta c_{n-1}).$$

Anschließend müssen wir noch die Konstanten α und β so bestimmen, dass die Anfangsbedingungen der Fibonacci-Folge erfüllt sind:

$$\begin{aligned} 0 &= f_0 = \alpha x_1^0 + \beta x_2^0 = \alpha + \beta \\ 1 &= f_1 = \alpha x_1^1 + \beta x_2^1 = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

[4] Wahlweise mit oder ohne 0 am Anfang.
[5] Dieser Ansatz ist auch ohne größeres Vorwissen relativ gut nachvollziehbar.
[6] Nicht-triviale Anfangswerte meint hier Anfangswerte ungleich 0.

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems erhalten wir $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Damit ergibt sich die explite Formel:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Das Interessante an der Formel ist vor allem, dass sie die irrationalen Zahl $\sqrt{5}$ enthält, aber trotzdem nur natürliche Zahlen als Ergebnis liefert.

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = 1 \\
f_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{5}}\left[(1+2\sqrt{5}+5) - (1-2\sqrt{5}+5)\right] = 1 \\
f_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{8\sqrt{5}}\left[(1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}) - (1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5})\right] = 2 \\
f_4 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right] \\
&= \frac{1}{16\sqrt{5}}\left[(1+4\sqrt{5}+30+20\sqrt{5}+25) - (1-4\sqrt{5}+30-20\sqrt{5}+25)\right] = 3
\end{aligned}$$

Der Ansatz mit Differenzengleichungen kann leicht auf Folgen mit ähnlichen Bildungsvorschriften wie die Fibonacci-Folge übertragen werden.

Grenzwert: Ein wichtiger Begriff in der Betrachtung von Folgen ist der Grenzwert. Wir wollen diesen zuerst formal definieren.
Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt. Dabei kann das $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden. Das N hängt von ε ab und je kleiner wir das ε wählen umso größer muss in der Regel das N sein.
Wir können die Definition formal schreiben als[7]:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Wenn die Folge (a_n) gegen a konvergiert, dann schreiben wir kurz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$[8].
Die Definition kann auch anders formuliert werden: Die Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder der Folge liegen. Dabei versteht man unter einer ε-Umgebung von a das Intervall

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}.$$

„Fast alle“ bedeutet alle bis auf endlich viele.
Eine Folge reeller Zahlen heißt divergent, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.
Ein Beispiel für eine konvergente Folge ist die durch $a_n = \frac{1}{n}$ definierte Folge. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, denn $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ ist für alle $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ erfüllt. Wir können also das N aus der Definition

[7]Der Allquantor $\forall$ und der Existenzquantor $\exists$ sind Operatoren der Prädikatenlogik. $\forall$ steht dabei für „Für alle“ und $\exists$ steht für „Es existiert“. $\Rightarrow$ bezeichnet eine Implikation: Aus $n \geq N$ folgt $|a_n - a| < \varepsilon$.
[8]lim steht dabei für Limes.

in Abhängigkeit von ε bestimmen. Folgen, die gegen 0 konvergieren, bezeichnen wir als Nullfolgen.

Aufgabe 3: Untersucht die Folgen auf Konvergenz

- $b_n = \dfrac{n}{n+1}$
- $c_n = \dfrac{n}{2^n}$
- $d_n = (-1)^n$

Es lassen sich verschieden Sätze/Aussagen über konvergente Folgen formulieren. Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente (reelle) Zahlenfolgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei eine Konstante, dann gilt

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

Ähnliche Aussagen lassen sich auch bei der Division von Folgen treffen, wenn man voraussetzt, dass die Folge im Nenner (der Divisor) am einem bestimmten Index ungleich 0 ist. Wir wollen den Beweis für die erste Aussage skizzieren: Sei $\varepsilon > 0$, dann existieren Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N_1$ und $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N_2$ gilt. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ folgt dann

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

und damit nach Definition $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.

Aufgabe 4: Beweist die folgenden beiden Aussagen:

- Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt, d.h., es existiert ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig, d.h., eine Folge kann nicht gegen zwei verschiedene reelle Zahlen konvergieren.

Reihen

Aufgabe 5: Berechnet die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen (einschließlich 100).

Der junge Gauß berechnete die Summe durch folgende einfache Methode:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & + & 2 & + & \cdots & + & 100 & & \\
+ & & + & & & & + & & \\
100 & + & 99 & + & \cdots & + & 1 & & \\
= & & = & & & & = & & \\
101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & = & 100 \cdot 101 = 10100
\end{array}$$

Also ist die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen genau 5050. Wir können die Summe auch mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$ formulieren. Die Summe hat dann die Form

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2}.$$

Mit der Methode von Gauß erhalten wir eine explizite Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen (inklusive der Zahl n)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die Formel kann auch durch vollständige Induktion bewiesen werden[9].

Unendliche Reihe: Allgemein können wir für eine Folge (a_k) die Summe der Glieder a_0, a_1, ..., bis a_n als $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ schreiben. Wir bezeichnen

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

als die n-te Partialsumme. Wenn die Folge (S_n) der Partialsummen konvergiert, dann bezeichnen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

als unendliche Reihe oder als konvergente Reihe. Ansonsten sprechen wir von einer divergenten Reihe.

Aufgabe 6: Bestimmt die Summe $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{-k}$ und den Wert der unendlichen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$.

Wir können die Lösung von Aufgabe 6 verwenden um die explizite Bildungsvorschrift für Beispielfolge (ii) zu bestimmen.

Aufgabe 7: Bestimmt die explizite Bildungsvorschrift für die zweite Beispielreihe: 4, 2, 6, 3, 7, 3.5, 7.5, 3.75.

Die Reihe aus Aufgabe 6 ist ein Spezialfall der geometrischen Reihe. Eine Folge, bei der der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der gleichen Konstanten entspricht, bezeichnet man als geometrische Folge (Beispielfolge (i)). Die Aufsummierung einer geometrischen Folge nennt man geometrische Reihe.

Aufgabe 8: Bestimmt die Summe $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ für eine beliebige Konstante $q \in \mathbb{R}$. Bestimmt den Wert der geometrischen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| < 1$.

Natürlich konvergieren nicht alle Reihen. Ein klassisches Beispiel für eine divergente Reihe ist die harmonische Reihe.

Aufgabe 9: Zeigt, dass die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

[9]Die vollständige Induktion bietet sich an, wenn man explizite Formeln für Summen beweisen will. Allerdings muss man zuerst die explizite Formel bestimmen.

Teleskopsummen: Eine größere Klasse von Reihen, deren Wert man explizit bestimmen kann, bilden die sogenannten Teleskopsummen.

Aufgabe 10: Bestimmt die Summe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ und den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Wir können die Summe wie folgt umschreiben

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und erhalten $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Die Summe wird zuerst verlängert, aber da sich zahlreiche Werte kürzen, erhält man anschließend den Wert der Summe und damit den Wert der unendlichen Reihe, wenn diese konvergent ist. Die Summe wird also „ausgefahren“ und wieder „eingezogen“ wie ein alte Fernrohr oder Teleskop. Wir benötigen hierbei häufiger die sogenannte Partialbruchzerlegung. Wir wollen den Ansatz dafür kurz am Beispiel der Aufgabe erklären[10]. Wir wollen den Bruch $\frac{1}{k(k+1)}$ in einfachere Brüche zerlegen:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)}{k(k+1)} + \frac{Bk}{k(k+1)} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)}.$$

Wir müssen die Konstanten A und B so bestimmen, dass die Gleichung $1 = A(k+1) + Bk$ für alle k erfüllt ist. Wir machen dazu einen Koeffizientvergleich. Betrachtet man nur die Vorkommen von k in der Gleichung, dann erhält man $0 = A + B$. Betrachtet man nur die absoluten Werte in der Gleichung, dann erhält man $1 = A$. Das entstandene Gleichungssystem lässt sich leicht nach A und B auflösen. Alternativ kann man auch ausgewählte Werte für k einsetzen. Setzt man z.B. $k = -1$ ein, dann folgt direkt $B = -1$.

Aufgabe 11: Bestimmt den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

Aufgabe 12: Bestimmt den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$.

Aufgabe 13: Bestimmt den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Aufgabe 14: Sei (f_k) die Fibonacci-Folge mit $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$. Bestimmt die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}}$.

Aufgabe 15: Bestimmt die Summe

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

[10] Wir gehen dabei vom einfachsten Fall aus: Der Nenner darf nur einfache reelle Nullstellen haben.

Lösungen und Lösungshinweise

Hinweis Aufgabe 3: Um die Konvergenz von (c_n) zu zeigen, beweise man zuerst, dass die Ungleichung $n^2 \leq 2^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt. Der Ungleichung kann z.B. mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

Lösung Aufgabe 4: Für $\varepsilon = 1$ existiert eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt und damit auch $a_n < a + 1$ für alle $n \geq N$. Wir setzen

$$M = \max\{a_0, a_1, a_2, ..., a_{N-1}, a+1\}.$$

Angenommen, a und a' seien zwei verschiedene Grenzwerte der Folge (a_n). Wir setzen $\varepsilon = \frac{|a-a'|}{2}$. Dann finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - a'| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt. Wir erhalten

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{|a-a'|}{2} + \frac{|a-a'|}{2} = |a - a'|$$

und damit einen Widerspruch.

Lösung Aufgabe 7: Die explizite Bildungsvorschrift ist

$$a_{2n} = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k+2} = 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad \text{und} \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2}a_{2n} = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Lösung Aufgabe 8: Man erhält die explizite Formel durch

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = (1-q)(1+q+\cdots+q^k) = (1-q)+(q-q^2)+\cdots+(q^k-q^{k+1}) = 1-q^{k+1}.$$

Es folgt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

Hinweis Aufgabe 9: Man kann die harmonische Reihe nach unten durch eine divergente Reihe abschtzen. Es gilt beispielsweise

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Hinweis Aufgabe 14: Es gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}}.$$

Lösung Aufgabe 15: Wenn man die Nenner rational macht, dann erhält man die Lösung $\sqrt{n} - 1$.