Chaotische Dynamik

Janine Erdmann, Jochen Merker

23. April 2005

1 Einleitung

Wir wollen uns in diesem Seminar mit chaotischen dynamischen Systemen beschäftigen, also mit dynamischen Systemen, die sich in einem gewissen Sinne chaotisch verhalten. Dazu müssen wir zunächst einmal klären, was denn überhaupt ein dynamisches System ist und wann ein solches dynamisches System chaotisch genannt werden soll.

1.1 Was ist ein dynamisches System?

Das Adjektiv „dynamisch“ ist abgeleitet vom griechischen Wort $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\sigma$ (gesprochen: dynamis; Bedeutung: Vermögen, Kraft, Möglichkeit; andere davon abgeleitete Wörter: Dynamik, Dynamit). Im hier diskutierten Kontext ist eine passende Übersetzung „die Möglichkeit zur Veränderung“. Ein dynamisches System ist also ein System, das sich (üblicherweise im Laufe der Zeit) verändern kann. Häufig ist dabei eine Veränderung des Systems gleichbedeutend mit einer Bewegung.

Aufgabe: Reihum nenne jeder ein Beispiel für ein dynamisches System (an der Tafel sammeln).

Lösung: *Bewegung von Körpern (Atomen, Maschinenteilen, Planeten); Strömung von Fluiden (Wasser, Luft); Temperaturänderungen (eines festen Körpers, eines Fluids); Konten, Aktienkurse, Populationszahl*

1.2 Wie kann man ein dynamisches System mathematisch beschreiben?

Um ein dynamisches System mathematisch zu beschreiben, muß man zunächst einmal die möglichen Zustände des betrachteten Systems mathematisch beschreiben, am einfachsten durch die Menge X aller möglichen Zustände des Systems, die der Zustandsraum des Systems genannt wird.

Aufgabe: Für die genannten dynamischen Systeme gebe man die Zustandsräume an.

Lösung: *Koordinaten (und Geschwindigkeiten) der verschiedenen Teile des Systems; Richtungsvektoren der Strömung in jedem Punkt; reelle Zahl in jedem Punkt (=Dichte); Dezimalzahlen mit zwei Stellen hinter dem Komma, natürliche Zahlen*

Hat man den Zustandsraum X des betrachteten Systems beschrieben, dann kann man anschließend die Dynamik des Systems durch eine Abbildung Φ beschreiben, die jedem Zustand $x \in X$, den das System zum Zeitpunkt t_0 hat, den Zustand $\Phi(x; t_0, t_1) \in X$ zuordnet, den das

System zum Zeitpunkt t_1 hat. Diese Abbildung Φ wird die Zeitabbildung des dynamischen Systems genannt.

Aufgabe: Man mache sich die Zeitabbildungen Φ für die genannten dynamischen Systeme bewußt.

1.3 Determinismus

Ein dynamisches System bestehend aus dem Zustandsraum X und der Zeitabbildung Φ heißt deterministisch, wenn es ein von der Zeit unabhängiges (Natur-)Gesetz gibt, das das Verhalten des Systems erklärt. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Abbildung $\Phi(x; t_0, t_1)$ nur von der Zeitspanne $t = t_1 - t_0$ (und nicht von den konkreten Zeitpunkten t_0, t_1) abhängt. Die dann durch $\Phi^t(x) := \Phi(x, t_0, t_1)$ (wenn $t = t_1 - t_0$) definierte Abbildung heißt der Fluß des deterministischen dynamischen Systems.

Aufgabe: Welche der genannten Systeme sind deterministisch, welche nicht ?

Lösung: *Abgeschlossene Systeme sind deterministisch, denn in solche Systeme kann nicht von außen eingegriffen werden (weder durch eine maschinelle äußere Anregung noch durch ein zufälliges Ereignis, und auch nicht durch eine „freie“ Willens-Entscheidung). Leider ist kein reales System abgeschlossen, aber Idealisierungen von realen Systemen sind immer abgeschlossene Systeme (bei der Idealisierung vernachlässigt man eben alle nur schwer erfassbaren außeren Einflüsse).*

Der Fluß hat die Eigenschaft $\Phi^{s+t}(x) = \Phi^t(\Phi^s(x))$, denn aufgrund des Determinismus ergibt sich derselbe Zustand, egal ob man - beginnend beim Zustand x - eine Zeitspanne s wartet und dann nochmal eine Zeitspanne t, oder ob man gleich die ganze Zeitspanne $s + t$ abwartet.

Insbesondere, wenn man nur diskrete Zeiten - wie z.B. bei Aktienkursen (Tag), Populationen (Jahreszählung) oder Poincare-Abbildungen - betrachtet, wird ein deterministisches dynamisches System vollständig durch die Iteration der Abbildung $f(x) := \Phi^1(x)$ beschrieben: Beginnend bei einem Anfangszustand x ist die zeitliche Entwicklung des Systems durch $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ gegeben. Diese Folge heißt die Zeitreihe zum Anfangszustand x.

1.4 Chaos in deterministischen dynamischen Systemen

Chaos in deterministischen dynamischen Systemen, das klingt erst einmal wie ein Widerspruch in sich. Denn ein deterministisches System hat ja ein Gesetz, nach dem es sich entwickelt. Es gibt also keine zufälligen, von außen kommenden Einflüsse in dem System, wie aber soll dann denn Chaos auftreten können?

Genau dies ist der interessante Punkt, denn obwohl in einem deterministischen dynamischen System die zeitliche Entwicklung eines Anfangszustandes von vornherein auf alle Ewigkeiten vollkommen festgelegt ist, können solche Systeme doch chaotisches Verhalten zeigen. Dies liegt daran, daß sich in gewissen dynamischen Systemen die Zeitreihen von zwei beliebig nah beieinanderliegenden Anfangszuständen im Laufe der Zeit doch ganz unterschiedlich entwickeln können. Man spricht dann davon, daß solche dynamischen Systeme sensitiv von den Anfangszuständen abhängen, und dies ist das erste Anzeichen für das Vorliegen von Chaos.

Beispiel: *Der Flügelschlag eines Schmetterlings in Asien und die dadurch heute entstehende Änderung der Luftströmung kann unserer Wetter in einem Monat beeinflussen: Hätte der*

Schmetterling nicht seine Flügel bewegt, so würde in einem Monat sonniges und warmes Wetter herrschen, durch den Flügelschlag ist es in einem Monat aber regnerisch und kalt. Das Wetter ist also ein chaotisches dynamisches System: Obwohl die Anfangszustände (die Luftströmung auf der ganzen Welt) sich in beiden Fällen nur um eine Winzigkeit (den Flügelschlag des Schmetterlings) unterscheiden, ist die Auswirkung dieses winzigen Unterschiedes groß.

Neben der Sensitivität von den Anfangsbedingungen ist das Mischen charakteristisch für seltsames Verhalten dynamischer Systeme, d.h. wenn wir unseren Zustandsraum X in beliebig kleine (offene) Teile $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ zerlegen, dann gibt es für jede Wahl von i, j einen Zustand $x \in X_i$, so daß man beginnend bei x im Laufe der Zeit in X_j landet, die Teile X_i werden also durcheinander gemischt.

Liegen diese beiden Eigenschaften vor, so verlangt man als letztes Anzeichen für Chaos noch, daß die periodischen Punkte dicht liegen. Dabei heißt ein Punkt $x \in X$ periodisch, wenn $f(f(\dots f(f(x))\dots)) = x$ gilt für eine endliche Anzahl von Iterationen. Bezeichnet nun $P \subset X$ die Menge der periodischen Punkte, so sagt man, daß P dicht in X liegt, wenn für jede Zerlegung $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ wie oben der Schnitt $P \cap X_i$ von P mit jedem X_i nichtleer ist. Dadurch ist jeder Zustand für eine gewisse Zeit immer in der Nähe einer periodischen Zeitreihe, zeigt also zunächst scheinbar reguläres Verhalten, bevor er dann doch urplötzlich in die Nähe einer anderen periodischen Zeitreihe (mit möglicherweise viel größerer Periode) wechselt. Dies ist wirklich chaotisch: Gerade noch denkt man, man hat die zeitliche Entwicklung verstanden, da sie ja für so lange Zeit periodisch aussah, und dann urplötzlich ist sie doch nicht periodisch !!

2 Intervall-Abbildungen

Wir wollen im folgenden ausschließlich deterministische dynamische Systeme mit diskreten Zeiten betrachten, und als Zustandsraum soll hier immer ein Intervall $X = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ dienen, im Regelfall das Intervall $X := [0, 1]$ (man stelle sich die Werte als Prozentangabe vor, z.B. die Bevölkerung hat das x-fache der maximal möglichen Bevölkerungszahl erreicht). Solche dynamischen Systeme werden, wie vorher erläutert, durch die Iteration einer Intervall-Abbildung $f : [0, 1] \to [0, 1]$ beschrieben.

Definition 2.1 *Eine* Funktion *drückt die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen aus. Traditionell wurden Funktionen als Regel oder Vorschrift definiert, die eine Eingangsgröße (Argument, meist x) in eine Ausgangsgröße (Funktionswert, meist y) überführt. Eine Funktion f weist jedem Element einer Definitionsmenge X (einem „x-Wert“) genau ein Element einer Wertemenge Y (einen „y-Wert“) zu. Sie hat demnach zwei wichtige Eigenschaften:*

1. *Jedem x-Wert aus dem Definitionsbereich wird ein y-Wert zugeordnet $x \mapsto y$*

2. *Jedem x-Wert aus dem Definitionsbereich wird nur ein y-Wert zugeordnet.*

Oft kann man eine Zuordnungsvorschrift angeben, man nennt sie Funktionsgleichung. Häufig werden auch die Begriffe Abbildung und Operator für Funktionen verwendet.

Wir rufen nochmal in Erinnerung, daß die Folge $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$ die Zeitreihe zum Startwert x heißt. Diese Folge kann rekursiv durch $x_1 := x$, $x_{n+1} := f(x_n)$, beschrieben werden. Das n-fache Iterieren einer Abbildung f kürzen wir häufig mit f^n ab (ACHTUNG: Nicht verwechseln mit Potenzbildung, z.B. $f^2(x) = f(f(x)) \neq f(x)f(x) = f(x)^2$). Bevor wir uns einigen Beispiele zuwenden, werden wir uns ein paar Begriffserklärungen anschauen, die bei der Untersuchung der Beispiele auftauchen werden:

Definition 2.2 *Sei f eine Funktion mit dem Definitions- und Wertebereich $[a,b]$.*

(1) Ein Punkt x aus $[a,b]$ heißt **Fixpunkt***, wenn gilt $f(x) = x$. Beispiel: $f(x) = x(1-x)+x$ auf $[0,1]$ hat die beiden Fixpunkte 0 und 1.*

(2) Ein Punkt x aus $[a,b]$ heißt **n-periodischer Punkt***, wenn man ihn nach n Iterationen wieder erhält, d.h. $x_n = f^n(x) = x$. Hierbei ist $n = 1,2,3,4,\ldots$. Beispiel: Wenn für eine Funktion f gilt $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = x_0$, dann ist x_0 ein 2-periodischer Punkt.*

2.1 Beispiele nicht-chaotischer und chaotischer Dynamik

Es gibt viele dynamische Systeme, die Chaos hervorbringen können. Wir werden in diesem Abschnitt jeweils ein paar Beispiele der chaotischen und der nicht-chaotischen Dynamik behandeln. Als Definitionsgebiet ist $X = [0,1]$ gegeben.

(A) Betrachten wir zu Beginn die (quadratische) *Logistische Abbildung*

$$f_a(x) \quad := \quad ax(1-x) \text{ für } 0 \leq \text{a} \leq 4.$$

f_a ist eine Abbildung von $[0,1]$ nach $[0,1]$, d.h. $X = [0,1]$ ist auch Wertebereich der Funktion (f_a hat Maximum bei $x = 1/2$ und $0 \leq f_a(1/2) = a/4 \leq 1$).

Diese Gleichung beschreibt viele Vorgänge in der Natur und Technik. Insbesondere in der Biologie kann man x deuten als Bevölkerungszahl z.B. einer Hasenpopulation in einem begrenzten Lebensraum. Betrachten wir die zugehörige Iteration

$$x_{n+1} \quad = \quad ax_n(1-x_n).$$

Hierbei kann a als ein Parameter angesehen werden, der sich aus der Geburten- und Sterberate ergibt, und mit n ist die Zyklus-Zeit, etwa Wochen, gemeint. Diese Gleichung kann dann wie folgt interpretiert werden: Die Bevölkerungszahl ist proportional zum Produkt aus (momentaner) Bevölkerungszahl und „Abstand" von der Bevölkerungsgrenze.

Wie sich die Folge verhält werden wir auf zwei Arten darstellen:

> (1) *Spinnwebverfahren*(Phasendiagramm): Darstellung, in der x_{n+1} über x_n abgetragen wird. Man stellt die logistische f_a und die lineare Abbildung $y = x$ in einem Koordinatensystem dar. Dann startet man bei einem beliebigen Anfangswert x_0 und zeichnet immer abwechselnd senkrecht zur Kurve und waagerecht zur Winkelhalbierenden.
> (2) *Zeitreihe*: Bevölkerungszahlen werden über die Zeit abgetragen

Das Verhalten der Populationsfolge (x_n) wird im Wesentlichen von dem Parameter a bestimmt:

> $0 < a < 1 \Rightarrow$ *Konvergenz* der Folge gegen Null;
> $1 < a < 3 \Rightarrow$ *Konvergenz* der Folge gegen den rechten Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden; Dieser Schnittpunkt x ist ein anziehender/stabiler Fixpunkt ($f_a(x) = x$). Anziehend/stabil heißt, dass man diesen Fixpunkt mit jedem Startwert erreicht. Das ist er genau solange, wie die Steigung von f_a im Schnittpunkt

betragsmäßig kleiner ist als 1.
$3 < r \Rightarrow$ Es treten zuerst mehrere *Häufungspunkte* (Eine Zahl h heißt Häufungspunkt einer Folge, wenn es eine Teilfolge gibt die gegen h konvergiert.) auf, ab $a = 3,57$ verhält sich die Folge chaotisch. Genauer und übersichtlicher wird die Abhängigkeit von dem Parameter a im Feigenbaum-Diagramm (Abschnitt 3.5) dargestellt.

Hierbei bedeutet *Konvergenz* gegen einen Punkt x, dass die Iterationsfolge (x_n) gegen den Wert x strebt, wenn n gegen unendlich geht. Anders formuliert für genügend große n kommen wir beliebig nahe an den Wert x heran, und würden ihn nach unendlich vielen Iterationsschritten „erreichen" ($x_\infty = x$).

(B) Als zweites Beispiel werden wir die *Zeltfunktion* $f : [0,1] \to [0,1]$ betrachten

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

mit der zugehörigen Iteration

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{falls } 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x_n & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases}.$$

Diese Funktion kann als mathematische Beschreibung des Knetvorgangs aufgefaßt werden. Hierbei wird der Teig ($[0,1]$) im ersten Schritt auf die doppelte Länge gerollt. Dies wird mathematisch durch die Funktion $2x$ ausgedrückt. Im zweiten Schritt wird der Teig in der Mitte gefaltet, die rechte Hälfte hochgebogen und hinüber auf die linke Hälfte gefaltet. Das bedeutet die erste Hälfte des Teigs wird nur gestreckt ($f(x) = 2x$ für $0 \leq x \leq 1/2$) und das andere Stück wird erst gestreckt und dann hinübergeklappt *d.h.*($f(x) = 2 - 2x$).

Wie wir erkennen können hat die Zelt-Abbildung einen 3-*periodischen Punkt* $x_0 = \frac{2}{7}$ (d.h. nach drei Iterationschritten erhält man wieder den Punkt $x_0 = x_3 = 2/7$). Diese Tatsache hat zur Folge, dass sich die Populationsfolge chaotisch verhält (siehe 3.3).

(C) Ein weiteres Beispiel einer chaotischen Abbildung ist die *Sägezahnfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

Diese hängt eng zusammen mit der Zeltabbildung. Wenn wir diese Funktion auch als eine Beschreibung eines Knetvorgang ansehen wollen, dann kann sie wie folgt interpretiert werden:

Der Teig ($[0,1]$) wird wieder um das doppelte gestreckt (2x), aber nun im Gegensatz zum voher beschriebenen Vorgang nicht umgeklappt sondern in der Mitte durchgeschnitten und dabei so übereinandergelegt, dass der Anfang des zweiten Stücks auf dem Anfang des ersten Stücks liegt. Das bedeutet, dass der erste Teil des Teigs nur um den Faktor 2 gestreckt wird, während der Rest getreckt und verschoben wird ($f(x) = 2x - 1$).

Auch diese Abbildung hat den 3-periodischen Punkt $2/7$ und verhält sich somit chaotisch.

(D) Betrachten wir nun die Abbildung $g_a : [0,1] \to [0,1]$, a rational, mit

$$g_a(x) \quad = \quad \begin{cases} x + a & \text{für x} < 1 - \text{a}, \\ x + a - 1 & \text{für x} > 1 - \text{a}. \end{cases}$$

Diese Funktion bezweckt, dass ein Punkt x aus dem Intervall $[0, 1-a]$, der genügend dicht an der Intervallgrenze $1-a$ liegt, durch $g_a(x)$ in das Intervall $[1-a, 1]$ verschoben wird und umgekehrt, liegt x in $[1-a,1]$ genügend dicht bei $1-a$, dann liegt $g_a(x)$ in $[0,1-a]$. Sie entspricht somit dem Umstapeln der beiden Intervalle $[0,1-a]$ und $[1-a,1]$ innerhalb von $[0,1]$.

Wir wollen uns nun mit der Dynamik dieser Iteration vertraut machen. Dazu wählen wir uns ein festes a, zum Beispiel $a=0.3$ und verfolgen den Verlauf der Iteration für die Anfangswerte $x_0 = 0.29, 0.31, 0.305$:

Startwert x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.29	0.59	0.89	0.19	0.49	0.79	0.09	0.39	0.69	0.99	0.29
0.305	0.605	0.905	0.205	0.505	0.805	0.105	0.405	0.705	0.005	0.305
0.31	0.61	0.91	0.21	0.51	0.81	0.11	0.41	0.71	0.01	0.31

Diese Abbildung ist nicht chaotisch.
(D) Zum Schluß schauen wir uns noch die Dynamik der linearen Abbildung

$$f_b(x) \quad := \quad bx \;\text{ für }\; 1 < \text{b} < \infty$$

an. Im Gegensatz zu den ersten Beispielen erstreckt sich der Wertebereich dieser Funktion auf ganz $[0,\infty)$. Wenn wir auch diese Funktion mit der dazugehörigen Iteration

$$x_{n+1} \quad := \quad bx_n \;\text{ für }\; 1 < \text{b} < \infty$$

als ein Populationmodell auffassen, dann bedeutet dies, dass sich die neue Bevölkerungszahl (x_{n+1}) proportional zu alten (x_n) verhält. In diesem Beispiel wird das Verhalten durch den Parameter b bestimmt:

Für alle $b > 1$ wächst die Population immer weiter.

Dieses System zeigt sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten. Jede Abweichung wird durch die Iteration verstärkt: Für einen gegebenen Startwert x_0 erhalten wir nach n Iterationen $x_n = b^n x_0$. Die Verstärkung der Abweichung vollzieht sich bei anderen Anfangswerten in der gleichen Größenordnung. Sei e_0 die Anfangsabweichung, d.h. wir iterieren den Anfangswert $u_0 = x_0 + e_0$ und bekommen nach n Iterationen $u_n = b^n(x_0+e_0)$. Der Fehler beträgt dann

$$e_n \quad = \quad u_n - x_n = b^n(x_0+e_0) - b^n x_0 = b^n e_0.$$

Somit vergrößert eine Anfangsabweichung e_0 sich in jedem Schritt um einen Faktor > 1. Dennoch wachsen Fehler und wahrer Wert in einem überschaubaren und harmonischen Verhältnis zueinander an. Die Beziehung zwischen ihnen bleibt zu jedem Zeitpunkt die gleiche. Der relative Fehler ist nämlich

$$\frac{e_n}{x_n} \quad = \quad \frac{b^n e_0}{b^n x_0} = \frac{e_0}{x_0} = \text{ konstant}\,.$$

Somit ist die Iteration harmlos und kann von einem Computer jederzeit ausgeführt werden. Bei jeder Iteration wächst der Fehler um den Faktor b, und daher ist

$$\left|\frac{e_n}{e_0}\right| \quad = \quad b^n.$$

Wir haben gezeigt, dass diese Abbildung sensitiv ist. Sie ist jedoch nicht chaotisch.

Betrachten wir nun zum Vergleich die logistische Abbildung f_4, dann bemerken wir, dass in diesem Fall ein vergleichbar einfaches Gesetz nicht zu erwarten ist. Durch numerische Versuche oder mathematische Überlegungen, kann gezeigt werden, dass durch die logistische Abbildung f_4 kleine Fehler bei jeder Iteration ungefähr verdoppelt werden. Allerdings können sich die Fehler nur dann verdoppeln, wenn sie genügend klein sind. Desweiteren verdoppelt sich der Fehler nur im Durchschnitt. Es gibt auch Punkte im Intervall $[0, 1]$, in deren Umgebung sich der Fehler verkleinert. Dies gilt z.B. für den Punkt $1/2$, in dessen Umgebung der Graph der Parabel ziemlich flach ist. In der Nähe der Endpunkte $0, 1$ hingegen verstärken sich die Fehler bei jeder Iteration beinahe um den Faktor 4.

2.2 Topologische Konjugation und Topologische Semikonjugation

Definition 2.3 *Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ zwei (reelle) Intervalle und $f : [a, b] \to [a, b]$ und $g : [c, d] \to [c, d]$. Dann heißen f und g* topologisch konjugiert*, wenn f und g stetig sind und ein Homöomorphismus $h : [a, b] \to [c, d]$ existiert, so dass*

$$h(f(x)) \quad = \quad g(h(x))$$

für alle Punkte x aus $[a, b]$ erfüllt ist.

Definition 2.4 *Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ zwei (reelle) Intervalle und $f : [a, b] \to [a, b]$ und $g : [c, d] \to [c, d]$. Dann heißen f und g* topologisch semikonjugiert*, eine stetige, surjektive Abbildung $h : [a, b] \to [c, d]$ existiert, so dass*

$$h(f(x)) \quad = \quad g(h(x))$$

für alle Punkte x aus $[a, b]$ erfüllt ist.

Erläuterungen: (a) Mit $h(f(x))$ ist hierbei gemeint, dass x durch f auf $f(x)$ abgebildet wird, und $f(x)$ durch h auf $h(f(x))$.
(b) Eine Abbildung $f[a, b] \to [a, b]$ heißt *stetig*, wenn für jedes $x \in [a, b]$ und jede Folge $x_1, x_2, x_3, ...$ in $[a, b]$ mit Grenzwert x die Folge der Bildpunkte $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ...$ den Grenzwert $f(x)$ hat. Lax formuliert bedeutet stetig, dass die Funktion gezeichnet werden kann, ohne den Stift abzusetzen.
(c) Eine Abbildung $h : [a, b] \to [c, d]$ heißt *injektiv*, wenn für $x_1 \neq x_2 \in [a, b]$ gilt $h(x_1) \neq h(x_2) \in [c, d]$. Eine Abbildung $h : [a, b] \to [c, d]$ heißt *surjektiv*, wenn für alle $y \in [c, d]$ ein $x \in [a, b]$ existiert mit $h(x) = y$. Eine Abbildung $h : [a, b] \to [c, d]$ die injektiv und surjektiv ist heißt bijektiv und ist invertierbar d.h. es existiert eine Umkehrabbildung $h^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ mit $h^{-1}(h(x)) = x$.
(d) Eine Abbildung $h : [a, b] \to [c, d]$ ist ein *Homöomorphismus*, wenn h stetig und bijektiv ist, und wenn die Umkehrabbildung h^{-1} ebenfalls stetig ist.

Wir werden nun anhand eines Beispieles den Begriff der *topologischen Konjugation* erklären. Dazu betrachten wir die uns schon bekannten zwei Funktionen f_4 (logistische Abbildung), f (Zelt-Abbildung) mit

$$f_4(x) \quad := \quad 4x(1 - x)$$

und

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Wir können mit der Abbildung $h(x) = \sin^2(\pi x/2)$ einen Zusammenhang zwischen den zu diesen Funktionen zugehörigen Iterationen herstellen:

Durch die Iteration eines Anfangswertes x_0 unter der Zeltfunktion und der Iteration des entsprechend transformierten Wertes $x'_0 = \sin^2(x_0\pi/2)$ unter der Parabel $f_4(x) = 4x(1-x)$ werden zwei Zeitreihen produziert, die durch die Funktion $x' = h(x) = \sin^2(x\pi/2)$ ineinander überführt werden. Nehmen wir nun den Startwert x_0 für die Zeltfunktion und $y_0 = x'_0$ für die Parabel, dann entstehen durch Iteration die Zeitreihen $x_0, x_1, x_2, ...$ (für die Zeltfunktion) und $y_0, y_1, y_2, ...$ (für die Parabel).

Wir sehen uns nun als Beispiel die Iteration von $x_0 = 8/25$ an.
Beispiel: Startwert $x_0 = 8/25$

Anzahl der Iterationen n	$x_n = f^n(x_0)$	$x'_n = \sin^2(n\pi/2)$	$y_n = f_4^n(y_0)$
0	$8/25$	$0,232$	$0,232$
1	$16/25$	$0,713$	$0,713$
2	$18/25$	$0,819$	$0,819$
3	$14/25$	$0,594$	$0,594$
4	$22/25$	$0,965$	$0,965$
5	$6/25$	$0,136$	$0,136$
6	$12/25$	$0,469$	$0,469$
7	$24/25$	$0,996$	$0,996$
8	$2/25$	$0,016$	$0,016$
9	$4/25$	$0,062$	$0,062$

Wie wir erkennen, stimmen die neuen Koordinaten der Bahn von x_0 unter der Zeltfunktion vollständig mit der Bahn von x'_0 unter dem quadratischen Iterator überein.

Dennoch müssen wir dieses Ergebnis mit Vorsicht betrachten. Auch wenn die Behauptung, dass die beiden rechten Spalten in der Tabelle, wie oft man auch iteriert, gleich sind, mathematisch vollständig begründet werden kann, dürfen wir diese Äquivalenz in der Praxis nicht erwarten. Wenn eine große Anzahl von Iterationen mit dem Computer oder Taschenrechner ausgeführt wird, dann entstehen durch die sensitive Abhängigkeit der Anfangswerte starke Abweichungen. Somit wird eine numerische Bestätigung für die Gleichheit der beiden Bahnen durch Chaos verhindert.

Die Äquivalenz zwischen Zeltfunktion und quadratischem Iterator $h(f^n(x_0)) = f_4(h(x_n))$: Wir benötigen lediglich die zwei trigonometrischen Gleichungen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{und} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Wir zeigen durch Induktion, dass $y_k = x'_k = h(x_k)$ für alle natürlichen Zahlen $k = 0, 1, 2, ...$ gilt, womit die äquivalenz der beiden Bahnen bewiesen ist.

Wie ersetzen y_0 in der quadratischen Gleichung durch den transformierten Ausdruck $y_0 = \sin^2(x_0\pi/2)$ und erhalten

$$y_1 \quad = \quad 4y_0(1-y_0) = 4\sin^2\left(\frac{\pi x_0}{2}\right)\left(1 - \frac{\pi x_0}{2}\right).$$

Durch Anwendung der trigonometrischen Gleichung $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ kommen wir zu

$$y_1 \quad = \quad 4\sin^2\left(\frac{x_0\pi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x_0\pi}{2}\right).$$

Dies kann mit der Verdopplungsgleichung $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ vereinfacht werden zu

$$y_1 \quad = \quad \sin^2(x_0\pi).$$

Die erste Iterierte von x_0 unter der Zeltfunktion f ist $x_1 = f(x_0)$. Wir zeigen nun, dass x_1 und y_1 wirklich gleich sind, nachdem (die Koordinatentransformation) h auf x_1 angewendet wurde, d.h. $x_1' = h(x_1) = y_1$.

1. Fall: $0 \leq x_0 \leq 1/2$. Dann ist $x_1 = f(x_0) = 2x_0$ und

$$x_1' = \sin^2\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) = \sin^2(x_0\pi) = y_1.$$

Andernfalls, wenn $1/2 \leq x \leq 1$ ist, erhalten wir $x_1 = f(x_0) = 2 - 2x_0$ und damit

$$x_1' = \sin^2\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) = \sin^2(\pi - \pi x_0).$$

Mit $\sin^2(x+\pi) = \sin^2 x$ und $\sin^2(-x) = \sin^2 x$ folgt dann $x_1' = \sin^2 x_0\pi = y_1$. Somit ist $x_1' = y_1$ bewiesen, und der Schluß $x_k' = y_k$ für alle k folgt durch Induktion.

Die Funktion $\sin^2(\pi x/2)$, durch die die beiden Abbildungen miteinander verknüpft sind, ist stetig und bijektiv. Dies kann man anhand der Darstellung der Funktion ziemlich einfach erkennen.

Als zweites wollen wir uns eine Klasse von Beispiele ansehen:

Satz 2.5 *Jedes Polynom zweiten Grades $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ist topologisch konjugiert zu $g(x) = x^2 + c$, d.h. es existiert ein Homöomorphismus h, so dass*

$$h(f(x)) \quad = \quad g(h(x)) \;\text{ für alle } \mathrm{x} \in \mathbb{R},$$

Darüberhinaus kann h als lineare Abbildung $h(x) = mx + n$ gewählt werden. Hierbei gilt

$$m = \alpha, \quad n = \tfrac{\beta}{2}, \quad c = \alpha\gamma + \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{\beta}{2}\right).$$

Beweis: Wir leiten die Koeffizienten von h aus der Annahme ab, dass h die Gestalt $h(x) = mx+n$ hat und der Funktionalgleichung $h(f(x)) = g(h(x))$ genügt, wobei $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ und $g(x) = x^2 + c$. Setzen wir f, g in die Funktionalgleichung ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} m\alpha x^2 + m\beta x + m\gamma + n &= (mx+n)^2 + c \\ &= m^2x^2 + 2mnx + n^2 + c. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Behauptung. $\square$

3 Chaotische Intervall-Abbildungen

Wir wollen nun versuchen, in mathematische Worte zu fassen, was denn das Chaotische an Abbildungen wie der logistischen Abbildung oder der Zelt-Abbildung ist, und was solche Abbildungen von nicht-chaotischen Abbildungen wie der Umpack-Abbildung unterscheidet. Dazu formulieren wir die schon in der Einleitung genannten Kriterien für Chaos mathematisch präzise:

Vorweg benötigen wir den Begriff der Umgebung: Bezeichne mit $d(x, x')$ den Abstand zweier Punkte x, x' in X, z.B. für $X = [0, 1]$ oder $X = \mathbb{R}$ sei $d(x, x') := |x - x'|$. Definiere desweiteren zu $\epsilon > 0$ die Menge $B_\epsilon(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < \epsilon\}$ aller Punkte, deren Abstand von x kleiner als ϵ ist. Man nennt $B_\epsilon(x)$ den Ball um x mit Radius ϵ.

Eine Menge $U \subset X$ heißt nun Umgebung von $x \in X$, wenn es einen Abstand $\epsilon > 0$ gibt, so daß jeder von x um weniger als ϵ entfernte Punkt bereits in U liegt, d.h. es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß aus $d(x, x') < \epsilon$ schon $x' \in U$ folgt bzw. $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt. Weiterhin nennen wir eine Menge $U \subset X$ einfach Umgebung, wenn es einen Punkt $x \in U$ gibt, so daß U Umgebung von x ist.

Aufgabe: Welche der folgenden Mengen $U \subset [0, 1]$ sind Umgebungen von welchen Punkten ?

(a) $U := (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ (b) $U := [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (c) $U := [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ (d) $U := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Lösung: *(a) U ist Umgebung aller Punkte aus U.*

(b) U ist Umgebung der Punkte aus $(1/4, 3/4)$, aber nicht Umgebung von $1/4$ oder $3/4$.

(c) U ist Umgebung der Punkte aus $(0, 1/4)$ und $(3/4, 1)$, aber nicht Umgebung von $0, 1/4, 3/4$ oder 1.

(d) U ist keine Umgebung.

Nun kommen wir zu den für Chaotizität wichtigen Merkmalen, die schon in der Einleitung erwähnt wurden:

- Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt sensitiv abhängig von den Anfangszuständen, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x es ein $x' \in U$ und ein n gibt mit $d(f^n(x), f^n(x')) > \epsilon$.

- Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt mischend, wenn es zu je zwei Umgebungen $U, U' \subset X$ ein n gibt mit $f^n(U) \cap U' \neq \emptyset$.

- Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt seltsam, wenn sie sensitiv abhängig von den Anfangszuständen und mischend ist. Liegen darüberhinaus die periodischen Punkte von f noch dicht, d.h. für jede Umgebung U gilt $U \cap \mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$ mit der Menge $\mathrm{Per}(f)$ der periodischen Punkte von f, so nennt man f chaotisch.

3.1 Kriterien für das Vorliegen von Chaos

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt genauere Begründungen ansehen, warum welche Abbildungen chaotisch sind, wollen wir einige Kriterien für das Vorliegen von Chaos beweisen.

Lemma 3.1 *Hat f eine dicht liegende Zeitreihe, dann ist f mischend.*

Beweis: Seien U, U' zwei Umgebungen in X und liege die Zeitreihe durch x dicht, dann gibt es ein n mit $f^n(x) \in U$. Sei $x' \in U'$ ein von $f^i(x)$, $i = 0, \ldots, n-1$, verschiedener Punkt und sei ϵ die Hälfte des kleinsten Abstands von x' zu diesen Punkten $f^i(x)$. Dann gilt $f^i(x) \notin U' \cap B_\epsilon(x')$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Nun ist aber auch $U' \cap B_\epsilon(x')$ eine Umgebung (von x'), und daher gibt es wieder ein m mit $f^m(x) \in V \cap B_\epsilon(x')$. Notwendigerweise ist diese m größer oder gleich n, daher ist $k := m - n$ größer oder gleich Null und somit die k-fache Iteration von f wohldefiniert. Somit gilt $f^m(x) = f^k(f^n(x)) \in f^k(U) \cap V$. Also gibt es zu je zwei Umgebungen U, U' ein k mit $f^k(U) \cap U' \neq \emptyset$, und daher ist f mischend. □

Satz 3.2 *Jede mischende Abbildung f, deren periodische Punkte dicht liegen, ist automatisch sensitiv abhängig von den Anfangszuständen und somit chaotisch.*

Beweis: Sei f mischend und habe eine dicht liegende Menge periodischer Punkte $\mathrm{Per}(f)$. Dann müssen wir zeigen, daß f auch sensitiv abhängig von den Anfangszuständen ist, und daher ein $\epsilon > 0$ finden, so daß für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x es ein $x' \in U$ und ein n gibt mit $d(f^n(x), f^n(x')) > \epsilon$.

Zunächst findet man ein ϵ_0, so daß zu jedem Punkt $x \in X$ ein periodicher Punkt $p \in \mathrm{Per}(f)$ mit $d(f^n(p), x) \geq \epsilon_0/2$ für alle n existiert. Sei nämlich

$$\epsilon_0 := \min\{d(f^n(p), f^m(q)) | n, m \in \mathbb{N}\}$$

der minimale Abstand zwischen den Bahnen zweier periodischer Punkte $p, q \in \mathrm{Per}(f)$ mit disjunkten Zeitorbits, dann hat jeder Punkt x zu einer der Bahnen einen Abstand größer oder gleich $\epsilon_0/2$, da sonst nach der Dreiecksungleichung $d(f^n(p), f^m(q)) \leq d(f^n(p), x) + d(f^m(q), x) < \epsilon_0/2 + \epsilon_0/2 = \epsilon_0$ im Widerspruch zur Definition von ϵ_0 wäre.

Nun zeigen wir, daß f sensitiv abhängig von den Anfangszuständen ist mit der Sensitivitätskonstante $\epsilon := \epsilon_0/8$. In der Tat, sei $x \in X$ und U eine Umgebung von x. Da die periodischen Punkte dicht liegen, gibt es ein $p \in \mathrm{Per}(f)$ mit $p \in U$ und $d(p, x) < \epsilon$. Nach Definition von ϵ gibt es einen anderen periodischen Punkt $q \in \mathrm{Per}(f)$, dessen Bahn mindestens den Abstand 4ϵ von x hat. Sei n die Periode von p, dann setzen wir $W_i := \{y \in X | d(f^i(q), y) < \epsilon\}$ und $V := f^{-1}(W_1) \cap \cdots \cap f^{-n}(W_n)$.

Bemerke, daß V eine Umgebung und wegen $q \in V$ auch nicht leer ist. Da f mischend ist, gibt es ein k mit $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, also können wir ein $x' \in U$ finden mit $f^k(x') \in V$. Sei j der ganzzahlige Anteil von $1 + \frac{k}{n}$, dann gilt $1 \leq nj - k \leq n$. Mit diesem j folgt aufgrund der Konstruktion von V, daß der Punkt $f^{nj}(x') = f^{nj-k}(f^k(x')) \in f^{nj-k}(V)$ in der Menge W_{nj-k} liegt. Andereseits gilt $f^{nj}(p) = p$, da p die Periode n hat. Somit folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung $d(a, b) \geq d(a, b) - d(b, c)$ die Beziehung

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(x')) = d(p, f^{nj}(x')) \geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(x')) - d(p, x) \geq 2\epsilon$$

denn es gilt $d(p, x) \leq \epsilon$, desweiteren $d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(x')) \leq \epsilon$ wegen $f^{nj}(x') \in W_{nj-k}$ und schließlich $d(x, f^{nj-k}(q)) \geq 4\epsilon$, da die Bahn von q mindestens den Abstand 4ϵ von x hat.

Da der Abstand $d(f^{nj}(p), f^{nj}(x'))$ größer oder gleich 2ϵ ist, hat also einer der beiden Punkte $f^{nj}(p)$ oder $f^{nj}(x')$ einen Abstand größer oder gleich ϵ von $f^{nj}(x)$. Da beide Punkte p, x' in U liegen, haben wir somit die sensitive Abhängigkeit mit der Sensitivitätskonstante ϵ gezeigt. $\square$

Satz 3.3 *Ist g (quasi-)topologisch konjugiert zu f und ist f chaotisch, so ist auch g chaotisch.*

Beweis: Seien $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ die betrachteten Iterationsabbildungen, und gelte mit einer stetigen und surjektiven Abbildung $\phi : X \to Y$ die Gleichung $g \circ \phi = \phi \circ f$.

Wir zeigen: **Wenn f mischend ist, dann auch g.**

Für offene $V, V' \subset Y$ sei nämlich $U := \phi^{-1}(V)$ und $U' := \phi^{-1}(V')$, dann gibt es - da f mischend ist - ein n mit $f^n(U) \cap U' \neq \emptyset$. Also gilt auch

$$g^n(V) \cap V' = g^n(\phi(U)) \cap \phi(U') = \phi(f^n(U)) \cap \phi(U') \supset \phi(f^n(U) \cap U') \neq \emptyset \quad ,$$

und somit ist g mischend.

Nun zeigen wir: **Wenn die periodischen Punkte von f dicht liegen, dann auch die von g.**

Bezeichne $\mathrm{Per}(g)$ die Menge aller periodischen Punkte von g und sei V eine beliebige Umgebung in Y. Dann ist $U := \phi^{-1}(V)$ eine Umgebung in X und somit gibt es einen periodischen Punkt $x \in \mathrm{Per}(f)$ mit $x \in U$. Sei $y := \phi(x)$, dann gilt $y \in V$ und y ist ein periodischer Punkt von g, denn habe x die Periode n, dann gilt

$$g^n(y) = g^n(\phi(x)) = \phi(f^n(x)) = \phi(x) = y \quad .$$

Somit ist nach Satz 3.2 die Chaotizität von g schon bewiesen. Trotzdem wollen wir hier noch zusätzlich zeigen (unter der Bedingung, daß ϕ eine Lipschitz-Konjugation ist): **Wenn f sensitiv von den Anfangszuständen abhängt, dann auch g.**

In der Tat, ist f sensitiv abhängig von den Anfangszuständen, dann gibt es ein ϵ_f, so daß für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x es ein $x' \in U$ und ein n gibt mit $d(f^n(x), f^n(x')) > \epsilon$. Sei nun $V \subset Y$ eine Umgebung von $y \in Y$. Setze $x := \phi^{-1}(y)$ und $U := \phi^{-1}(V)$, dann gibt es ein $x' \in U$ und ein n mit $d(f^n(x), f^n(x')) > \epsilon$. Sei $y' := \phi(x') \in V$, dann gilt

$$d_Y(g^n(y), g^n(y')) = d_Y(g^n(\phi(x)), g^n(\phi(x'))) = d_Y(\phi(f^n(x)), \phi(f^n(x'))) \geq \frac{1}{L} d_X(f^n(x), f^n(x')) > \frac{\epsilon_f}{L}$$

mit der Lipschitzkonstante L von ϕ^{-1}. Somit ist g auch sensitiv abhängig mit der Konstanten $\epsilon_g := \frac{\epsilon_f}{L}$. $\square$

3.2 Chaotizität einzelner Beispiel-Abbildungen

Lemma 3.4 *Die Umpack-Abbildung ist für rationales a nicht chaotisch.*

Beweis: Sei $a = p/q$ rational mit teilerfremden p, q, dann ist für jedes x die Zeitreihe $f^n(x) = x + n\frac{p}{q} \mod 1$ periodisch mit der Periode q, somit liegen die periodischen Punkte dicht.

Aber die Abbildung ist nicht mischend, z.B. schneidet keine Iteration des Intervalls $[0, 1/4q]$ das Intervall $[1/2q, 3/4q]$, denn $[0, 1/q]$ wird einfach nur in ein anderes Intervall $[n\frac{p}{q}, n\frac{p}{q} + \frac{1}{q}]$ verschoben, ohne daß der Abstand $1/4q$ der beiden Teilintervalle $[0, 1/4q]$ und $[1/2q, 3/4q]$ sich ändert. $\square$

Lemma 3.5 *Der Bernoulli-Shift* $f(x) = 2x \mod 1$ *ist chaotisch.*

Beweis: Jedes Intervall $[0, \epsilon]$ überdeckt irgendwann ganz $[0, 1]$, denn sei n so groß, daß $2^n\epsilon \geq 1$, dann gilt $f^n([0, \epsilon]) = [0, 2^n\epsilon] \mod 1 = [0, 1]$. Also ist f mischend, denn wenn U Umgebung von x ist, dann gibt es ein ϵ mit $x+[0, \epsilon] \subset U$, und daher gilt $f^n(U) \supset 2^n x+[0, 2^n\epsilon] \mod 1 = [0, 1]$.

Desweiteren liegt die Menge der periodischen Punkte dicht in $[0, 1]$, denn die periodischen Punkte sind die x mit $2^n x \mod 1 = x$, d.h. $2^n x - x = k$ oder $x = \frac{k}{2^n-1}$ für $0 \leq k < 2^n$ (z.B. $x = 1/3$ ist 2-periodisch, $x = 2/7$ ist 3-periodisch). Somit liegen die periodischen Punkte dicht, denn jede Zahl aus $[0, 1]$ läßt sich beliebig genau durch eine Zahl der Form $\frac{k}{2^n-1}$ annähren.

Also ist nach Satz 3.2 der Bernoulli-Shift chaotisch. $\square$

Lemma 3.6 *Die logistische Abbildung* $g(x) = ax(1 - x)$ *ist für* $a := 4$ *chaotisch.*

Beweis: Die quadratische Abbildung $h(y) := 2y2 - 1$ auf $[-1, 1]$ ist quasi-topologisch konjugiert zum Bernoulli-Shift $f(x) = 2x \mod 1$ durch $\phi_1(x) := \cos(2\pi x)$. In der Tat, ϕ_1 ist surjektiv, stetig und erfüllt

$$(h \circ \phi_1)(x) = 2\cos(2\pi x)2 - 1 = \cos(4\pi x) = (\phi_1 \circ f)(x)$$

wegen $\cos(2z) = \cos(z)2 - \sin(z)2$. Da der Bernoulli-Shift g nach Lemma 3.5 chaotisch ist, ist nach Satz 3.3 auch h chaotisch.

Nun ist aber seinerseits f topologisch konjugiert zu h via $\phi_2(x) := \frac{1}{2}(1 - x)$ wegen

$$(f\circ\phi_2)(x) = \frac{4}{2}(1-x)(\frac{1}{2}(1-x)-1) = -(1-x)(1+x) = -(1-x2) = \frac{1}{2}(1-(2x2-1)) = (\phi_2\circ h)(x) \quad ,$$

und daher ist auch f chaotisch. $\square$

3.3 Periode 3 erzwingt Chaos

2/7 ist Punkt der Periode drei für die Zeltabbildung

Janine

3.4 Numerik und Chaos

Wenn wir mit dem Taschenrechner rechnen, machen wir ja immer einen Fehler, da der Taschenrechner nur endlich viele Zahlen kennt. Wenn wir nun Zeitreihen zu einer chaotischen Abbildung f ausrechnen, könnte es ja sein, daß die berechnete Zeitreihe gar nichts mit der wirklichen zu tun hat, denn kleine Fehler haben ja große Wirkungen.

Dem ist oft aber nicht so: Zumindest für die sogenannten hyperbolischen Abbildungen f gibt es in der Nähe einer berechneten Zeitreihe auch immer eine reale Zeitreihe. Dies ist die Aussage des Beschattungslemmas, das wir im folgenden für den Bernoulli-Shift $f(x) := 2x \mod 1$ beweisen wollen.

Lemma 3.7 *Sei $\epsilon > 0$, dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jede fehlerhafte Zeitreihe $y_0, y_1, \ldots,$ bei der man bei der Berechnung von f maximal einen Fehler δ macht, eine wirkliche Zeitreihe $x_0, x_1, \ldots$ von f existiert mit $|x_k - y_k| < \epsilon$. Mit anderen Worten, die δ-fehlerhafte Zeitreihe $y_0, y_1, \ldots$ wird ϵ-beschattet durch die wirkliche Zeitreihe $x_0, x_1, \ldots$.*

Beweis: Die fehlerhafte Zeitreihe ist durch $y_{k+1} = f(y_k) + \epsilon_k = 2y_k + \epsilon_k \mod 1$ gegeben, daher gilt $y_k = 2^k y_0 + \sum_{i=1}^{k} 2^{k-i}\epsilon_i$. Sei $x_0 := y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\epsilon_k$, dann gilt $x_k = f^k(x_0) = 2^k y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{k-i}\epsilon_i$, also $|x_k - y_k| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{k-i}\epsilon_i \leq \epsilon$. $\square$

3.5 Das Feigenbaum-Szenario: Periodenverdopplung und ihr Spiegelbild im Chaos

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit dem möglicherweise schönsten und wichtigsten Ergebnis der Chaostheorie befassen: Es ist als *Weg von der Ordnung ins Chaos* oder *Feigenbaumsche Universalität* bekannt geworden.

Lange Zeit wurde Ordnung und Chaos als Gegensatzpaar betrachtet. Für beide Begriffe wurden spezielle Theorien entwickelt. Chaos wurde dabei als die Seite der Natur verstanden, die durch einfache , und selbst durch komplizierte Gesetze, nicht beschrieben werden kann. Eine große Wirkung hatte die folgende Beobachtung: Viele natürliche Systeme können ohne Schwierigkeiten von den einen in den anderen Zustand übergehen, z.B. regelmäßiger Herzschlang in unregelmäßigen. Man hat entdeckt, dass es einen *universellen Fahrplan* gibt, der den Übergang von Ordnung ins Chaos kennzeichnet.

Betrachten wir zum Beispiel den quadratischen Iterator

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Wir wollen nun das Verhalten dieses Iterators für alle Parameterwerte zwischen 1 und 4 untersuchen. Wir interessieren uns hierbei um das Langzeitverhalten, denn wir wollen wissen was mit einer Iterierten x_n passiert, wenn die Abhängigkeit von der ursprüglichen Wahl des des Anfangswertes x_0 annähernd auf Null abgefallen ist. Wählen wir zum Beispiel $a = 2$ und einen beliebigen Startwert $x_0 \in [0, 1]$, dann strebt die Zeitreihe nach einer Übergangsphase von einigen Iterationen auf den Fixpunkt 1/2 zu. Dieser Fixpunkt ist unabhängig von dem Anfangswert. Nun tragen wir diesen Endzustand (Fixpunkt) gegn den Parameter a ab. Nun werden wir das Diagramm durch das folgende Verfahren vervollständigen :

(1) Wir wählen einen beliebigen Anfangswert x_0 in $[0, 1]$ und berechne, sagen wir 200 Iterationen $x_1, x_2, ..., x_{200}$.

(2) Wir lassen die ersten hundert Iterationen außer Acht.

(3) Wir zeichnen die verbleibenden Iterationen in das Diagramm ein .

Mit diesem Verfahren erhalten wir für den Parameter a die folgenden Diagramme.

Wendet wir das Verfahren auf alle Parameterwerte $a \in [0, 4]$ an, dann erhalten wir das folgende Endzustandsdiagramm für den quadratischen Iterator. Wir stellen fest, dass für Parameterwerte $a > 3$ der Endzustand nicht mehr nur aus einem Punkt besteht, sondern aus zwei, vier oder noch mehr Punkten. Für $a = 4$, finden wir schließlich das Chaos, d.h. die Punkte die zum Endzustand gehören füllen das ganze Intervall $[0, 1]$ dicht aus. Das somit erhaltene Diagramm,

wird auch oft *Feigenbaum-Diagramm* genannt. Es stellt ein bemerkenswertes Fraktal dar.
Eine der wesentlichen Strukturen die wir in diesem Diagramm erkennen können, ist die ei-

nes verzweigten Baumes, der die qualitativen Veränderungen im dynamischen Verhalten des quadratischen Iterators beschreibt. Wie wir erkenne verzweigt der Hauptast in zwei Teiläste, die dann wiederum verzweigen und dieser Prozeß setzt sich immer wieder fort. Das ist der Bereich der *Periodenverdopplung* in Feigenbaumdiagramm.
Wir werden nun grob erkläre, was man unter Periodenverdopplung versteht: In dem Bereich, in dem wir ein Ast sehen existiert nur ein einziger Endzustand, der unabhängig von x_0 ist, und von a anhängt. Wenn wir zwei äste sehen, bedeutet dies, dass das Langzeitverhalten zwischen zwei verschiedenen Endzuständen hin und her springt. Dies ist das 2-periodische Verhalten. Bei vier Ästen bedeutet es, dass die Periode von 2 auf 4 angewachsen ist. So geht es nun immer weiter, bis das Chaos beginnt sich einzustellen und für $a = 4$ wird Chaos schließlich das ganze Intervall $[0, 1]$ beherrschen.

Satz 3.8 *Der erste Verzweigungspunkt des Feigenbaumdiagramms in* $b_0 = 3$.

Beweis: Mit $f_a(f_a(x)) = x$, d.h. 2-periodischer Punkt, erhalten wir

$$-a^3x^4 + 2a^3x^3 - (a^2 + a^3)x^2 + (a^2 - 1)x = 0.$$

Da wir bereits die zwei Fixpunkte der Einfach-Iteration $x_1 = 0$ und $x_2 = (a - 1)/a$ kennen, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$-a^3x^2 + (a^2 + a^3)x - (a^2 - 1) = 0,$$

durch Division von x und $x - (a - 1)/a$. Wenn wir nun durch $-a^3$ dividieren, dann erhalten wir

$$x^2 - \frac{(a + 1)}{a}x + \frac{a + 1}{a^2} = 0,$$

mit den dazugehörigen Lösungen

$$x_h(a) = \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2a} \quad \text{und} \quad x_h(a) = \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}.$$

Diese beiden Lösungen sind nur für Werte $a \geq 3$ definiert und fallen für $a = 3$ zusammen, d.h. $x_h(3) = x_t(3)$. $\square$

Die weiteren Verzweigungspunkte b_n sind im folgenden gegeben

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
3	$3,449489$	$3,544090$	$3,564407$	$3,568759$	$3,569692$	$3,569891$

Berechnen wir nun den Abstand $d_n = b_{n+1} - b_n$ zwischen zwei Verzweigungpunkten

d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
$4,4949 \cdot 10^{-1}$	$9,4611 \cdot 10^{-2}$	$2,0316 \cdot 10^{-2}$	$4,3521 \cdot 10^{-3}$	$9,3219 \cdot 10^{-4}$	$1,9964 \cdot 10^{-4}$

und bestimmen das Verhältnis von d_n zu d_{n+1}

d_0/d_1	d_1/d_2	d_2/d_3	d_3/d_4
$4,7514$	$4,6562$	$4,6682$	$4,6687$

dann sehen wir, dass die Quotienten $\delta_n = d_n/d_{n+1}$ ziemlich nahe beieinander liegen. Man kann zeigen, dass $\delta_n \to \delta = 4,6692016091029...$ strebt für $n \to \infty$. Hierbei wird δ die *Feigenbaumkonstante* genannt.

Bemerkung: Die Feigenbaumkonstante ist nicht nur interessant für den quadratischen Iterator, sondern ist in vielen anderen naturwissenschaftlichen Prozessen, in denen die Periodenverdopplung eine Rolle spielt, zu finden, d.h. die Feigenbaumkonstante ist eine universelle Konstante.