# Die Jensensche Ungleichung

Falko Baustian
Klassenstufe 11 und 12
03.05.2019

*Aufgabe 1*: Beweist mit elementaren Methoden, dass die beiden Ungleichungen

$$\frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad \frac{(a+2b)^2}{3} \leq a^2 + 2b^2$$

für alle reellen Zahlen $a$ und $b$ erfüllt sind.

Die beiden Ungleichungen lassen sich zu

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2 \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right)^2 \leq \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}b^2$$

umschreiben und resultieren auch direkt aus dem Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = x^2$.

**Definition**: Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein endliches oder unendliches Intervall. Wir bezeichnen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ als *konvex*, wenn die Ungleichung

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

für alle $a, b \in D$ und für alle $0 < \lambda < 1$ gilt. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *konkav*, wenn

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

für alle $a, b \in D$ und für alle $0 < \lambda < 1$ gilt.

Bildlich kann man sich das so vorstellen: Wenn man eine konvexe Funktionen entlang steigender Werte beobachtet, dann vollführt die Funktion eine Linkskurve. Es sind aber auch gerade Teilstücke möglich. Eine konkave Funktion vollführt dagegen eine Rechtskurve.
Mathematisch genauer kann man sagen, dass für eine konvexe Funktion $f$ (und $a < b$) der Graph im Intervall $[a, b]$ unterhalb der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ liegt. Für eine konkave Funktion liegt der Graph oberhalb der entsprechenden Sekante.

*Aufgabe 2*: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist konvex.

Das Krümmungsverhalten einer Funktion ist unabhängig vom Monotonieverhalten der Kurve. Es gibt sowohl monoton wachsende konvexe Funktionen als auch monoton fallende konvexe Funktionen. Wenn eine Funktion $f$ konvex ist, dann ist die Funktion $g(x) = -f(x)$ konkav und anders herum.
Die Ungleichung lässt sich auch auf mehrere Stützstellen verallgemeinern:

*Aufgabe 3* (**Jensensche Ungleichung**): Für eine konvexe Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ nichtnegative Gewichten $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + ...\lambda_n = 1$ gilt

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n)$$

für beliebige Stützstellen $x_1, x_2, ..., x_n \in D$. Für konkave Funktionen gilt die Ungleichung mit „$\geq$" an Stelle von „$\leq$".

Die Jensensche Ungleichung ist sehr allgemein und viele wichtige Ungleichungen aus der Analysis können aus der Jensenschen Ungleichung hergeleitet werden. Es gibt auch noch weitere Verallgemeinerungen der Jensenschen Ungleichung z.B. für Integrale und Erwartungswerte.

*Aufgabe 4*: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4$ ist konvex.

*Aufgabe 5*: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^k$, wobei $k$ eine Zweierpotenz ist, ist konvex.

Eine Funktion $f$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Gerade Funktion sind an der $y$-Achse gespiegelt. Eine Funktion $f$ heißt *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Ungerade sind am Koordinatenursprung (per Punktspiegelung) gespiegelt. Diese Eigenschaften wirken sich auf der Konvexitätverhalten der Funktion aus.

*Aufgabe 6*: Sei $I_+$ das Intervall $(0, \infty)$ und $I_-$ das Intervall $(-\infty, 0)$. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, die auf $I_+$ konvex (bzw. konkav) ist, dann ist $f$ auch auf $I_-$ konvex (bzw. konkav). Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, die auf $I_+$ konvex (bzw. konkav) ist, dann ist $g$ auf $I_-$ konkav (bzw. konvex).

*Aufgabe 7*: Wie ist das Krümmungsverhalten der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ ?

Für die meisten Funktionen ist es schwierig das Krümmungsverhalten mit elementaren Methoden zu zeigen. Das gilt bereits für einfache Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{x}$ oder $f(x) = 2^x$. Praktischerweise gibt es aber einen Zusammenhang zwischen dem Krümmungsverhalten einer Funktion und ihrer zweiten Ableitung. Dazu müssen wir zuerst einmal die Ableitung mit Hilfe des Grenzwerts einer Funktion definieren.

**Definition**: Wir bezeichnen mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ den *Grenzwert* oder *Limes* der Funktionswerte von $f$, wenn sich $x$ an $x_0$ „annähert“. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $x_0$, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h, dass für alle Zahlenfolgen $(x_n) \subset D$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Analog definieren wir den *rechtsseitigen* und *linksseitigen Grenzwert*

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x),$$

wobei wir nur $x > x_0$ bzw. $x < x_0$ betrachten. Der Grenzwert existiert nur, wenn der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert existieren und den gleichen Wert haben.

**Definition**: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $f$ heißt in einem Punkt $x_0 \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Wir bezeichnen den Grenzwert als *Differentialquotienten* bzw. als *Ableitung* von $f$ in $x_0$.

Aus der Definition ergeben sich direkt die Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = c \in \mathbb{R}$ und der linearen Funktion $f(x) = mx$ mit $m \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{c - c}{h} = 0,$$

$$g'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{m(x_0 + h) - mx_0}{h} = m.$$

*Aufgabe 8*: Bestimmt mit dem Differentialquotienten die Ableitungen von

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2, \quad f_2\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad f_3\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{x}.$$

Differenzierbare Funktion sind automatisch auch stetig. Stetige Funktionen müssen aber nicht unbedingt differenzierbar sein.

*Aufgabe 9*: Zeigt, dass die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ nicht überall differenzierbar ist.

Aus ihrer Ableitung lassen sich auch verschiedene andere Eigenschaften einer Funktion herleiten.

**Definition**: Sei $f(a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass $f$ in $x_0 \in (a, b)$ ein *lokales Maximum* hat, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt. Analog können wir ein *lokales Minimum* definieren.

**Satz**: Wenn eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein *lokales Extremum* (lokales Maximum oder lokales Minimum) besitzt und in $x_0$ differenzierbar ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

*Beweis*: Wir beschränken uns beim Beweis auf den Fall des lokalen Maximums. Der zweite Fall folgt dann direkt wir durch Betrachtung von $-f$. Sei also $x_0$ ein lokales Maximum von $f$, dann gilt $f(x) - f(x_0) \leq 0$ für $x$ „nahe" bei $x_0$ und damit $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ für $x \geq x_0$ „nahe" bei $x_0$ und $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ für $x \leq x_0$ „nahe" bei $x_0$. Da $f$ in $x_0$ differenzierbar ist, existiert die Ableitung $f'(x_0)$ und der links- und rechtsseitige Grenzwert stimmen überein. Es folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist ein notwendiges aber kein hinreichendes Kritierum für die Existenz eines lokalen Extremas.

**Satz** (**Satz von Rolle**): Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $(a,b)$ differenzierbar ist, mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

*Beweis*: Für konstante $f$ ist die Aussage trivial. Da die Funktion $f$ stetig ist, nimmt sie im Intervall $(a,b)$ ihr Maximum und Minimum an. (Die Aussage setzen wir als gegeben voraus.) In diesen Punkten verschwindet nach dem vorigen Satz die Ableitung.

Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Rolle ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Dieser sagt aus, dass wenn wir zwei Punkte auf dem Graphen einer differenzierbaren Funktionen mit einer Gerade verbinden, dass es dann einen Punkt auf dem Graphen gibt in dem der Anstieg der Funktion mit dem Anstieg der Geraden übereinstimmt.

**Satz** (**Mittelwertsatz der Differentialrechnung**): Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $(a,b)$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

*Beweis*: Wir betrachten die Hilfsfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

die stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in $(a,b)$ ist. Es gilt $\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$ und damit existiert nach dem Satz von Rolle ein $x_0 \in (a,b)$ mit $\varphi'(x_0) = 0$. Die Ableitung von $\varphi$ ist

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

und somit gilt $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann verwendet werden um den Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und dem Monotonieverhalten bzw. dem Krmmungsverhalten der Funktion zu zeigen.

**Definition**: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), wenn $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$) für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ gilt. Die Funktion heißt *streng monoton wachsend*, wenn sogar $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ erfüllt ist. Analog wird *streng monoton fallend* definiert.

**Satz**: Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $(a,b)$ differenzierbar ist. Ist $f$ monoton wachsend (bzw. monoton fallend), dann gilt $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a,b)$.

*Beweis*: Da $f$ monoton wachsend ist, ist der Differentialquotient $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für alle $x, x_0 \in (a,b)$ nicht-negativ. Der Grenzübergang liefert dann $f'(x_0) \geq 0$.

**Satz**: Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $(a,b)$ differenzierbar ist. Wenn für alle $x \in (a,b)$ gilt, dass

(a) $f'(x) \geq 0$, dann ist $f$ in $[a,b]$ monoton wachsend.

(b) $f'(x) > 0$, dann ist $f$ in $[a,b]$ streng monoton wachsend.

(c) $f'(x) \leq 0$, dann ist $f$ in $[a,b]$ monoton fallend.

(d) $f'(x) > 0$, dann ist $f$ in $[a,b]$ streng monoton fallend.

*Beweis*: Wir beweisen nur Teil (a). Angenommen, $f$ sei in $[a,b]$ nicht monoton wachsend, dann existieren $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) > f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$$

im Widerspruch zu Annahme. Die restlichen Beweise werden ähnlich geführt.

Der Mittelwertsatz kann ebenfalls verwendet werden um zu zeigen, dass Funktionen in Punkten, in denen $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$) gilt, ein lokales Maximum (bzw. Minimum) haben. Wir wollen jetzt aber auf den Zusammenhang zwischen Ableitung und Krümmungsverhalten eingehen.

**Satz**: Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. $f$ ist genau dann konvex (bzw. konkav), wenn $f''(x) \geq 0$ (bzw. $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt. Die Aussage ist auch für Funktionen auf $\mathbb{R}$ und den unendlichen Intervallen $(a,\infty)$ oder $(-\infty,b)$ gültig.

*Beweis*: Sei $f$ konvex. Angenommen, es gäbe ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f''(x_0) < 0$. Wir betrachten die Hilfsfunktion $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = f(x) - f'(x_0)(x-x_0)$. Dann ist $\varphi$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit den Ableitungen

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \text{und} \quad \varphi''(x) = f''(x).$$

In $x_0$ gilt $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) < 0$. Die Funktion hat dort also eine strenges lokales Maximum. (Diese Aussage setzen wir als gegeben voraus). Es existiert also ein kleines $\delta > 0$, so dass $x_0 - \delta, x_0 + \delta \in (a,b)$ mit $\varphi(x_0) > \varphi(x_0-\delta)$ und $\varphi(x_0) > \varphi(x_0+\delta)$. Wählen wir nun $\lambda = \frac{1}{2}$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}(x_0-\delta) + \frac{1}{2}(x_0+\delta)\right) &= f(x_0) = \varphi(x_0) > \frac{1}{2}(\varphi(x_0-\delta) + \varphi(x_0+\delta)) \\
&= \frac{1}{2}(f(x_0-\delta) - f'(x_0)\delta + f(x_0+\delta) + f'(x_0)\delta) \\
&= \frac{1}{2}f(x_0-\delta) + \frac{1}{2}f(x_0+\delta)
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Konvexität von $f$.
Wir setzen nun voraus, dass $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt. Dann ist die Ableitung $f'(x)$ monoton wachsend. Seien nun $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$, $0 < \lambda < 1$ und $\tilde{x} = \lambda x + (1-\lambda)y$. Es folgt $x < \tilde{x} < y$ und der Mittelwertsatz liefert $x_{0,1} \in (x, \tilde{x})$ und $x_{0,2} \in (\tilde{x}, y)$ mit

$$\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x} = f'(x_{0,1}) \leq f'(x_{0,2}) = \frac{f(y)-f(\tilde{x})}{y-\tilde{x}}.$$

Es gilt

$$\tilde{x} - x = (1-\lambda)(y-x) \quad \text{und} \quad y - \tilde{x} = \lambda(y-x)$$

und somit

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{1-\lambda} \leq \frac{f(y) - f(\tilde{x})}{\lambda}.$$

Umformen der Gleichung liefert die Konvexitätsungleichung

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\tilde{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Wir können jetzt das Krümmungsverhalten einer Funktion mittels der Ableitung bestimmen.

*Aufgabe 10*: Zeigt, dass die Funktion $f\colon I_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ konvex ist und beweist, dass die Ungleichungen $9xy \leq (x+2y)(2x+y)$ für alle $x, y \geq 0$ erfüllt ist.

*Aufgabe 11*: Beweist die Ungleichung $\ln(x_1 + ... + x_n) \geq \ln(n \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n})$ für $x_1, ..., x_n \geq 0$.

Aus der Ungleichung aus *Aufgabe 11* folgt mit der Monotonie der Exponentialfunktion direkt die **Ungleichung von arithmetischen und geometrischen Mittel**

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}$$

für $x_1, ..., x_n \geq 0$, die trivialerweise gilt sobald ein Wert 0 ist.

*Aufgabe 12* (**Youngsche Ungleichung**): Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigt, dass

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{p}$$

für alle $a, b > 0$ gilt.

Ein Spezialfall der Youngschen Ungleichung mit $p = q = 2$ ist die **Cauchysche Ungleichung**

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

die sich auch leicht mit elementaren Methoden zeigen lässt. Die Youngsche Ungleichung kann verwendet werden um wichtige Integralungleichungen wie die Höldersche Ungleichung zu beweisen.

*Aufgabe 13* (**Ky-Fan-Ungleichung**): Seien $x_1, ..., x_n$ Zahlen mit $0 < x_k < \frac{1}{2}$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt die Ungleichung

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}}{\sqrt[n]{(1-x_1) \cdot ... \cdot (1-x_n)}} \leq \frac{\frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)}{\frac{1}{n}((1-x_1) + ... + (1-x_n))}.$$

Die Beweise mittels der Jensenschen Ungleichung ermöglichen es eine gewichtete Versionen beispielsweise der Ky-Fan-Ungleichung zu beweisen. Es können auch geometrische Zusammenhänge mit der Jensenschen Ungleichung bewiesen werden.

*Aufgabe 14*: Seien $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ die Innenwinkel eines Dreiecks, dann gilt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

*Aufgabe 15*: Gegeben sei ein Dreieck mit Flächeninhalt $A$. Dann besitzt das Dreieck zwei Seiten für die das Produkt ihrer Seitenlängen größer gleich $\frac{4\sqrt{3}}{3}A$ ist.

Zum Abschluß betrachten wir noch eine Olympiadeaufgabe.

*Aufgabe 16*: Seien $x_1, ..., x_n$ positive reelle Zahlen mit der Summe $s = x_1 + ... + x_n$. Beweist die Ungleichung

$$\frac{x_1}{s - x_1} + ... + \frac{x_n}{s - x_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

**Lösungen**

*Lösung 1*: Aus $(a-b)^2 \geq 0$ folgt

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\left((a+b)^2+(a-b)^2\right)\geq\frac{1}{2}(a+b)^2$$

und

$$a^2+2b^2=\frac{1}{3}\left((a+2b)^2+2(a-b)^2\right)\geq\frac{1}{3}(a+2b)^2.$$

*Lösung 2*: Es gilt

$$\lambda a^2+(1-\lambda)b^2=(\lambda a+(1-\lambda)b)^2+\lambda(1-\lambda)(a-b)^2\geq(\lambda a+(1-\lambda)b)^2.$$

*Lösung 3*: Die Jensensche Ungleichung kann mit vollständiger Induktion über $n$ bewiesen werden. Der Induktionsanfang für $n=2$ folgt direkt aus der Konvexität von $f$. Sei die Ungleichung nun für alle $k\leq n$ erfüllt. Wir betrachten $n+1$ Gewichte mit $\lambda_1+...+\lambda_{n+1}=1$ und erhalten

$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1+...+\lambda_{n+1}x_{n+1})&=f\left((\lambda_1+...+\lambda_n)\frac{\lambda_1x_1+...+\lambda_nx_n}{\lambda_1+...+\lambda_n}+\lambda_{n+1}x_{n+1}\right)\\&\leq(\lambda_1+...+\lambda_n)f\left(\frac{\lambda_1x_1+...+\lambda_nx_n}{\lambda_1+...+\lambda_n}\right)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})\end{aligned}$$

aus der Konvexität von $f$. Weiter folgt mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\lambda_1x_1+...+\lambda_nx_n}{\lambda_1+...+\lambda_n}\right)&=f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+...+\lambda_n}x_1+\frac{\lambda_n}{\lambda_1+...+\lambda_n}x_n\right)\\&\leq\frac{\lambda_1}{\lambda_1+...+\lambda_n}f(x_1)+...+\frac{\lambda_n}{\lambda_1+...+\lambda_n}f(x_n).\end{aligned}$$

Damit gilt die Ungleichung auch für $n+1$ und nach vollständige Induktion dann auch für alle $n\in\mathbb{N}$. Der zweite Teil der Aussage folgt direkt daraus, dass für konkave Funktionen $f$ die Funktion $-f$ konvex ist.

*Lösung 4*: Wir wissen bereits, dass die Funktion $g(x)=x^2$ konvex ist. Weiter gilt $\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)^2=1$. Es folgt

$$\begin{aligned}(\lambda x+(1-\lambda)y)^4&=\left((\lambda x+(1-\lambda)y)^2\right)^2=(\lambda^2x^2+2\lambda(1-\lambda)xy+(1-\lambda)^2y^2)^2\\&\leq\lambda^2x^4+2\lambda(1-\lambda)(xy)^2+(1-\lambda)^2y^4=(\lambda x^2+(1-\lambda)y^2)^2\\&\leq\lambda x^4+(1-\lambda)y^4.\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Abschätzung auch wie folgt durchführen

$$\begin{aligned}(\lambda x+(1-\lambda)y)^4&=(\lambda x+(1-\lambda)y)^2(\lambda x+(1-\lambda)y)^2\leq(\lambda x^2+(1-\lambda)y^2)(\lambda x^2+(1-\lambda)y^2)\\&=(\lambda x^2+(1-\lambda)y^2)^2\leq\lambda x^4+(1-\lambda)y^4)^2.\end{aligned}$$

*Lösung 5*: Die Aussage kann durch vollständige Induktion gezeigt werden. Sei $k=2^n$. Der Induktionsanfang für $n=1$ ist die Lösung von *Aufgabe 2*. Sei die Aussage für alle $m\leq n$ erfüllt. Es folgt

$$\begin{aligned}(\lambda x+(1-\lambda)y)^{2^{n+1}}&=(\lambda x+(1-\lambda)y)^{2\cdot2^n}=(\lambda x+(1-\lambda)y)^{2^n}(\lambda x+(1-\lambda)y)^{2^n}\\&\leq(\lambda x^{2^n}+(1-\lambda)y^{2^n})(\lambda x^{2^n}+(1-\lambda)y^{2^n})\qquad\text{nach Induktionsvoraussetzung}\\&=(\lambda x^{2^n}+(1-\lambda)y^{2^n})^2\leq\lambda\left(x^{2^n}\right)^2+(1-\lambda)\left(y^{2^n}\right)^2\quad\text{nach Induktionsanfang}\\&=\lambda x^{2^{n+1}}+(1-\lambda)y^{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

*Lösung 6*: Wir beschränken uns auf den konvexen Fall. Es gilt für alle $x, y \in I_-$, dass $\tilde{x} = -x$ und $\tilde{y} = -y$ in $I_+$ liegen. Es folgt

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda(-\tilde{x}) + (1-\lambda)(-\tilde{y})) = f(-(\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\tilde{y})) = f(\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\tilde{y}) \\ &\leq \lambda f(\tilde{x}) + (1-\lambda)f(\tilde{y}) = \lambda f(-x) + (1-\lambda)f(-y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda(-\tilde{x}) + (1-\lambda)(-\tilde{y})) = f(-(\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\tilde{y})) = -f(\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\tilde{y}) \\ &\geq -(\lambda f(\tilde{x}) + (1-\lambda)f(\tilde{y})) = \lambda(-f(\tilde{x})) + (1-\lambda)(-f(\tilde{y})) \\ &= \lambda f(-\tilde{x}) + (1-\lambda)f(-\tilde{y}) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

*Lösung 7*: Die Funktion ist ungerade, weil $(-x)^3 = -x^3$ gilt. Wir betrachten die Funktion also nur auf dem Intervall $I_+$. Es gilt (für $x, y > 0$)

$$\begin{aligned} (\lambda x + (1-\lambda)y)^3 &= (\lambda x + (1-\lambda)y)(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leq (\lambda x + (1-\lambda)y)(\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2) \\ &= \lambda x^3 + (1-\lambda)y^3 + (\lambda^2 - \lambda)x^3 + \lambda(1-\lambda)(x^2y + xy^2) + ((1-\lambda^2) - (1-\lambda))y^3 \\ &= \lambda x^3 + (1-\lambda)y^3 + \underbrace{\lambda(\lambda-1)x^3 + \lambda(1-\lambda)(x^2y + xy^2) + \lambda(\lambda-1)y^3}_{=\lambda(1-\lambda)(-x^3+x^2y+xy^2-y^3)}. \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass

$$\begin{array}{ccccccccc} & - & x^3 & + & x^2y & + & xy^2 & - & y^3 \\ = & - & x^3 & + & 2x^2y & - & xy^2 & & \\ & & & - & x^2y & + & 2xy^2 & - & y^3 \end{array}$$

und damit $-x^3 + x^2y + xy^2 - y^3 = -(x+y)(x-y)^2$. Es folgt

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^3 \leq \lambda x^3 + (1-\lambda)y^3 - \lambda(1-\lambda)(x+y)(x-y)^2 \leq \lambda x^3 + (1-\lambda)y^3.$$

*Lösung 8*: Es gilt

$$\begin{aligned} f_1'(x_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{(x_0+h)^2 - x_0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} 2x_0 + h = 2x_0, \\ f_2'(x_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\frac{x_0 - (x_0+h)}{(x_0+h)x_0} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{-1}{(x_0+h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}, \\ f_3'(x_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{(x_0+h) - x_0}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

*Lösung 9*: Für $x_0$ stimmen der rechts- und linksseitige Grenzwert der Differentialquotienten nicht überein

$$\begin{aligned} \lim_{h\searrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\searrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\searrow 0} 1 = 1, \\ \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\nearrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\nearrow 0} -1 = -1. \end{aligned}$$

Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ und damit auch die Ableitung in $x_0 = 0$ nicht.

*Lösung 10*: Es gilt $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$ und damit ist die Funktion konvex. Die Ungleichung ist für $x = 0$ bzw. $y = 0$ trivialerweise erfüllt, wenn $x, y \geq 0$. Wir können also annehmen, dass $x, y > 0$. Wir betrachten die Konvexitätungleichung für $\lambda = \frac{1}{3}$ und erhalten

$$\frac{3}{x+2y} = \frac{1}{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y} \leq \frac{1}{3}\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{y} = \frac{1}{3}\frac{y+2x}{xy}.$$

Ausmultiplizieren liefert die Ungleichung.

*Lösung 11*: Wir betrachten den natürlichen Logarithmus $f(x) = \ln x$. Es gilt $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ für alle $x > 0$. Die Funktion ist also konkav. Wir wählen $n$ gleich große Gewichte $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$ und erhalten

$$\ln\left(\frac{x_1}{n} + ... + \frac{x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\ln x_1 + ... + \frac{1}{n}\ln x_n.$$

Anwenden der Logarithmengesetze liefert

$$\ln\left(\frac{x_1}{n} + ... + \frac{x_n}{n}\right) = \ln\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) = \ln(x_1 + ... + x_n) - \ln n$$

und

$$\frac{1}{n}\ln x_1 + ... + \frac{1}{n}\ln x_n = \ln\sqrt[n]{x_1} + ... + \ln\sqrt[n]{x_n} = \ln\sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n} = \ln(n\sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}) - \ln n.$$

Die gewünschte Ungleichung folgt dann direkt.

*Lösung 12*: Die Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist konvex und es folgt

$$ab = \mathrm{e}^{\ln a}\mathrm{e}^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leq \frac{1}{p}\mathrm{e}^{\ln a^p} + \frac{1}{q}\mathrm{e}^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Lösung 13*: Wir betrachten die Funktion $f(x) = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln\frac{x}{1-x}$. Es gilt

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} < 0 \quad \text{für alle } 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Die Funktion ist im Intervall $(0, \frac{1}{2})$ also konvex und wir können die Ungleichung für $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$ anwenden

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1 + ... + \frac{1}{n}x_n\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}x_1 - ... - \frac{1}{n}x_n\right) \geq \frac{1}{n}(\ln x_1 - \ln(1-x_1)) + ... + \frac{1}{n}(\ln x_n - \ln(1-x_n)).$$

Geeignetes Umformen mit den Logarithmengesetzen und anschließendes Anwenden der monoton wachsenden Exponentialfunktion auf die Ungleichung liefert die Ky-Fan-Ungleichung.

*Lösung 14*: Für die Innenwinkel eines Dreiecks gilt $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi\ (= 180°)$. Die Funktion $f(x) = \sin x$ erfüllt $f''(x) = -\sin x < 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ und ist damit im Intervall konkav. Es folgt

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

*Lösung 15*: Die Innenwinkel des Dreiecks seien $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ mit den jeweils gegenüberliegenden Seiten $a$, $b$ und $c$. Der Flächeninhalt berechnet sich aus den Formeln $A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, $A = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ und $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Es folgt

$$\frac{1}{3}(bc + ac + ab) = \frac{1}{3}\left(\frac{2A}{\sin\alpha} + \frac{2A}{\sin\beta} + \frac{2A}{\sin\gamma}\right) = \frac{2A}{3}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right)$$

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ mit $f''(x) = \frac{1}{\sin x} + 2\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$. Somit gilt mit der Konvexitätsungleichung

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sin\gamma} \geq \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

und es folgt $\max(bc, ac, ab) \geq \frac{1}{3}(bc + ac + ab) \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}A$.

*Lösung 16*: Die Funktion $f(x) = \frac{x}{s-x}$ ist für alle $0 < x < s$ konvex, weil $f''(x) = \frac{2s}{(s-x)^3} > 0$ für alle $x \in (0, s)$ gilt. Die Aussage folgt dann direkt aus der Konvexitätsungleichung.