Turán-Probleme und flache Antiketten

RHO–Sommercamp Mirow 2008

1 Extremale Graphentheorie

1 Definition (Graph). Ein (endlicher) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ aus einer endlichen Menge V (Knotenmenge) und einer Teilmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$ (Kantenmenge). Bei uns ist hier immer $n = |V|$ und $m = |E|$.

2 Problem. Wieviele Kanten kann ein Graph haben wenn wir bestimmte Strukturen verbieten?

3 Satz (Mantel). Sei G ein dreiecksfreier Graph auf n Knoten. Dann ist $m \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$. Der eindeutig bestimmte extremale Graph ist der vollständige bipartite Graph $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.

4 Aufgabe. Jeder Graph enthält mindestens $\frac{m(4m-n^2)}{3n}$ Dreiecke.

5 Satz (Turán). Sei G ein $K_{k+1}-$freier Graph auf n Knoten. Dann ist $m \leq t(n,k)$. Der eindeutig bestimmte extremale Graph ist der Turan-Graph $T_{n,k}$.

6 Aufgabe. Für $n \geq 5$ enthält jeder Graph mit $\lfloor n^2/4 \rfloor + 2$ Kanten zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Kante.

7 Aufgabe. Wenn ein Graph mit $\lfloor n^2/4 \rfloor - l$ Kanten ein Dreieck enthält, dann gibt's auch $\lfloor n/2 \rfloor - l - 1$ Dreiecke.

8 Aufgabe. In jedem Graphen kann man die Kanten mit $\lfloor n^2/4 \rfloor$ Kanten und Dreiecken überdecken.

9 Definition (Hypergraph). Ein Hypergraph ist ein Paar $H = (V, E)$ aus einer endlichen Menge V (Knotenmenge) und einer Teilmenge $E \subseteq 2^V$ (Kantenmenge). Wir vereinbaren wieder $n = |V|$ und $m = |E|$.

10 Definition (uniform). Wenn alle Kanten eines Hypergraphen H die gleiche Mächtigkeit k haben, nennen wir H $k-$*uniform*.

11 Problem. Wieviele Kanten kann ein $k-$uniformer Hypergraph haben wenn wir bestimmte Strukturen verbieten? Etwas bescheidener: Für vorgegebene verbotene Strukturen suchen wir eine Zahl ρ, so daß

$$\frac{\mathrm{ex}(n)}{\binom{n}{k}} \to \rho \quad \text{für } n \to \infty,$$

wobei $\mathrm{ex}(n)$ die maximale Kantenanzahl in einem Hypergraphen auf n Knoten ohne die verbotenen Strukturen ist.

12 Beispiel. Wenn $k = 3$ ist, und wir die Fano-Ebene verbieten, tut's $\rho = \frac{3}{4}$ [4].

13 Definition. Wenn die verbotene Struktur in Problem 11 der vollständige Hypergraph auf l Knoten ist $(l > k)$, so bezeichnen wir das entsprechende ρ mit $t_k(l)$.

14 Beispiel. Es gibt K_4–freie 3–uniforme Hypergraphen mit $\frac{5}{54}n^3 + O(n^2)$ Kanten. Das liefert

$$t_3(4) \geq \frac{5}{54}n^3 / \frac{n^3}{6} = \frac{5}{9}.$$

In der umgekehrten Richtung gilt [3]

$$t_3(4) \leq \frac{3+\sqrt{17}}{12} = 0.593592\ldots.$$

15 Vermutung. *Das* Problem auf dem Gebiet ist die Turán-Vermutung: $t_3(4) = 5/9$.

2 Extremale Antiketten

16 Definition (B_n). Mit B_n bezeichnen wir $2^{[n]}$, die Menge der Teilmengen von $[n] = \{1, \ldots, n\}$, geordnet durch Inklusion.

17 Definition (Antikette). Eine *Antikette* ist eine Familie $\mathcal{A} \subseteq B_n$, so daß für $A, B \in \mathcal{A}$

$$A \neq B \qquad \Longrightarrow \qquad A \not\subseteq B.$$

18 Definition (flach). Eine Antikette $\mathcal{A}$ heißt *flach* falls $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k} \cup \binom{[n]}{k+1}$ für ein k.

19 Definition (maximal). Eine flache Antikette $\mathcal{A}$ heißt maximal, wenn es keine flache Antikette $\mathcal{A}'$ gibt, die $\mathcal{A}$ echt enthält.

20 Problem. Wie groß ist eine maximale flache Antikette $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k} \cup \binom{[n]}{k+1}$ mindestens?

21 Problem. Das Problem kann auch variiert werden. Für $1 < k < l < n$ können wir fragen, wie groß eine maximale Antikette $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k} \cup \binom{[n]}{l}$ mindestens sein muß.

22 Satz (Der Fall $(k, l) = (2, 3)$). Sei $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{2} \cup \binom{[n]}{3}$ eine maximale flache Antikette. Dann ist

$$|\mathcal{A}| \geq \binom{n}{2} - \frac{(n+1)^2}{8},$$

und die extremale Konstruktion ist im wesentlichen eindeutig.

23 Beispiel (Der Fall $(k, l) = (2, 4)$). Es gibt eine maximale Antikette $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{2} \cup \binom{[n]}{4}$ mit

$$|\mathcal{A}| = \binom{n}{2} - \frac{3}{16}n^2 + o(n^2).$$

Umgekehrt gilt für jede maximale Antikette $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{2} \cup \binom{[n]}{4}$

$$|\mathcal{A}| \geq \binom{n}{2} - \frac{5}{16}n^2 + o(n^2).$$

24 Vermutung. Die minimale Größe einer maximalen Antikette $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{2} \cup \binom{[n]}{4}$ ist $\binom{n}{2} - \frac{3}{16}n^2 + o(n^2)$.

25 Beispiel (Der Fall $(k,l) = (3,4)$). Es gibt eine maximale Antikette $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{3} \cup \binom{[n]}{4}$ mit

$$|\mathcal{A}| = \binom{n}{3} - \frac{n^3}{27} + o(n^3) < 0.12963n^3 + o(n^3).$$

Umgekehrt gilt für jede maximale Antikette $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{3} \cup \binom{[n]}{4}$

$$|\mathcal{A}| \geq \binom{n}{3} - \frac{2}{3} t_3(4) \binom{n}{3} + o(n^3) \geq 0.1007n^3 + o(n^3).$$

26 Bemerkung. Unter der Voraussetzung, daß die Turán-Vermutung stimmt, wird die untere Schranke noch etwas besser. Dann gilt nämlich für eine extremale Antikette

$$\frac{17}{162}n^3 + o(n^3) \leq |\mathcal{A}| \leq \frac{21}{162}n^3 + o(n^3).$$

Literatur

[1] M. Aigner. Turán's Graph Theorem, *American Mathematical Monthly* **102**, 808–816, 1995

[2] B. Bollobás. Modern Graph Theory, Springer, 1998

[3] F. Chung and L. Lu. An upper bound for the Turán number $t_3(n,4)$, *Journal of Combinatorial Theory A*, **87** (1999), 381-389

[4] P. Keevash and B. Sudakov. The exact Turán number of the Fano plane, *Combinatorica*, **25**, 561–574, 2004