Arithmetische Funktionen

RHO–Sommercamp Mirow 2008

1 Definition. Eine reell- oder komplexwertige Funktion, die auf den positiven ganzen Zahlen definiert ist, heißt arithmetische (oder zahlentheoretische) Funktion.

2 Beispiel (Die Möbiusfunktion $\mu(n)$). Wir setzen $\mu(1) = 1$ und für $n > 1$ mit Primfaktorzerlegung $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ setzen wir

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3 Satz.

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

4 Aufgabe. Beweise

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \mu^2(n),$$

und allgemeiner

$$\sum_{d^k \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m^k \mid n \text{ für ein } m > 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

5 Beispiel (Die Eulersche Phi-Funktion $\varphi(n)$). $\varphi(n)$ ist die Anzahl der positiven Zahlen $k \in [n] := \{1, \ldots, n\}$ mit $(k, n) = 1$.

6 Satz.

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n.$$

7 Satz.

$$\varphi(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

8 Satz.

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

9 Satz. Die Eulerfunktion hat folgende Eigenschaften.

(a) Für p prim und $\alpha \geq 1$ ist $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

(b) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}$, wobei $d = (m, n)$,

(c) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ für teilerfremde n und m,

(d) Aus $a \mid b$ folgt $\varphi(a) \mid \varphi(b)$.

(e) Für $n \geq 3$ ist $\varphi(n)$ gerade. Außerdem ist $2^r \mid \varphi(n)$ falls n r paarweise verschiedene ungerade Primfaktoren hat.

10 Aufgabe. Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit

$$\text{(a) } \varphi(n) = n/2, \qquad \text{(b) } \varphi(n) = \varphi(2n), \qquad \text{(c) } \varphi(n) = 12.$$

11 Aufgabe. Beweise

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}.$$

12 Definition (Dirichlet-Produkt). Für zwei arithmetische Funktionen f und g definieren wir das *Dirichlet-Produkt* $h = f * g$ durch

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

13 Bemerkung. Wenn wir mit N die Funktion $N(n) = n$ bezeichnen, können wir Satz 7 auch als $\varphi = \mu * N$ schreiben.

14 Satz. Die Dirichlet-Multiplikation ist kommutativ und assoziativ.

15 Definition (Identität). Die Funktion

$$I(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

nennen wir *Identitätsfunktion*.

16 Satz. Für jede arithmetische Funktion f ist $f * I = I * f = f$.

17 Satz (Dirichlet-Inverse). Für jede arithmetische Funktion f mit $f(1) \neq 0$ gibt's eine eindeutig bestimmte arithmetische Funktion f^{-1} mit $f * f^{-1} = f^{-1} * f = I$. Diese Inverse ist durch die folgende Rekursion gegeben.

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \qquad f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \quad \text{für } n > 1.$$

18 Bemerkung. Für die Einheitsfunktion $u(n) = 1 \ \forall n$ sagt Satz 3, daß $\mu * u = I$, d.h. u und μ sind Dirichlet-invers zueinander.

19 Satz (Möbius-Inversion). Für arithmetische Funktionen f und g ist

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \Longleftrightarrow \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d).$$

20 Definition (Multiplikative Funktion). Eine arithmetische Funktion f heißt *multiplikativ*, falls f nicht identisch verschwindet und

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{falls } (m, n) = 1.$$

f heißt vollständig multiplikativ falls $f(mn) = f(m)f(n)$ für alle m und n gilt.

21 Satz. Für eine multiplikative Funktion f ist $f(1) = 1$.

22 Satz. Sei f eine arithmetische Funktion mit $f(1) = 1$.

(a) f ist genau dann multiplikativ wenn $f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_k^{\alpha_k})$ für alle Primzahlen p_i und ganze Zahlen $\alpha_i \geq 1$.

(b) Wenn f multiplikativ ist, so ist f genau dann vollständig multiplikativ wenn $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$ für alle Primzahlen p und ganze Zahlen $\alpha \geq 1$.

23 Satz. Wenn f und g multiplikativ sind, so ist auch $f * g$ multiplikativ.

24 Satz. Wenn g und $f * g$ multiplikativ sind, so ist auch f multiplikativ.

25 Satz. Wenn f multiplikativ ist, so ist auch f^{-1} multiplikativ.

26 Satz. Eine multiplikative Funktion f ist genau dann vollständig multiplikativ, wenn

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

27 Satz. Für eine multiplikative Funktion f ist

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p)).$$

28 Beispiel (Die Inverse der Euler-Funktion). Aus $\varphi = \mu * N$ folgt

$$\varphi^{-1} = \mu^{-1} * N^{-1} = \mu^{-1} * \mu N = u * \mu N.$$

D.h. $\varphi^{-1}(n) = \sum\limits_{d|n} d\mu(d)$, und mit Satz 27 kriegen wir $\varphi^{-1}(n) = \prod\limits_{p|n}(1 - p)$.

29 Definition (Teilerfunktionen). Für reelles oder komplexes α definieren wir

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha.$$

Insbesondere bezeichnen wir σ_1 mit σ und σ_0 mit τ, d.h. $\tau(n)$ ist die Anzahl und $\sigma(n)$ ist die Summe der Teiler von n.

30 Aufgabe. (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig gewählter positiver Teiler von 10^{99} ein Vielfaches von 10^{88} ist?

(b) Wieviele geordnete Paare (a, b) mit $\mathrm{kgV}(a, b) = 2^3 5^7 11^{13}$ gibt es?

(c) Bestimme das Produkt der positiven Teiler von $n = 420^4$.

31 Satz. Für $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ gelten die folgenden Aussagen.

(a) $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$,

(b) $\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r} - 1}{p_r - 1}$,

(c) $\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}$,

(d) $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

32 Aufgabe. Was ist die Summe der geraden Teiler von 10000?

33 Aufgabe. Beweise $\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n) \leq n^2$.

34 Aufgabe. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen k, für die es eine natürliche Zahl n gibt mit

$$\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = k.$$

(*IMO 1998*)

35 Aufgabe. Für jede positive ganze Zahl n gilt

$$\frac{\sigma(1)}{1} + \frac{\sigma(2)}{2} + \cdots + \frac{\sigma(n)}{n} \leq 2n.$$

(*HMMT 2004*)

36 Aufgabe. Für eine positive ganze Zahl k sei $p(k)$ der größte ungerade Primteiler von k. Beweise

$$\frac{2n}{3} < \frac{p(1)}{1} + \frac{p(2)}{2} + \cdots + \frac{p(n)}{n} < \frac{2(n+1)}{3}.$$

37 Aufgabe. Sei $f(x)$ definiert für alle rationalen Zahlen in $[0,1]$. Wir setzen

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad F^*(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(a) Beweise $F^* = \mu * F$.

(b) Beweise $\mu(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} \exp(2\pi i k/n)$.

38 Aufgabe. $\varphi_k(n)$ sei die Summe der $k-$ten Potenzen der zu n teilerfremden Zahlen $\leq n$. Beweise

$$\sum_{d|n} \frac{\varphi_k(d)}{d^k} = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k}.$$

39 Aufgabe. Beweise für $n > 1$,

$$\varphi_1(n) = \frac{n\varphi(n)}{2}, \qquad \varphi_2(n) = \frac{n^2\varphi(n)}{3} + \frac{n}{6}\prod_{p|n}(1-p).$$

Wie sieht die analoge Formel für $\varphi_3(n)$ aus?

Literatur

[Apo] Apostol, T., Introduction to Analytic Number Theory, Springer, 1976

[And] Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z., 104 Number Theory Problems, Birkhäuser, 2007