Teilbarkeit und Restklassen

Falko Baustian
Klassenstufe 9 und 10
14.10.2020/28.10.2020/12.11.2020

Teilbarkeit:

Der Begriff der Teilbarkeit bezieht sich in der Regel auf natürliche Zahlen oder auf ganze Zahlen. Wir führen dafür die folgenden Bezeichnungen ein:

- natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$,
- natürliche Zahlen mit 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$,
- ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -2, 0, 1, 2, ...\}$.

Wir wollen jetzt den Begriff des Teilers definieren. Eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ ist ein Teiler von $b \in \mathbb{Z}$, wenn eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ mit $ac = b$ existiert. Wir schreiben $a \mid b$, wenn a ein Teiler von b ist, und $a \nmid b$, wenn a kein Teiler von b ist.

Durch die Teilereigenschaft ist eine Relation auf den ganzen und den natürlichen Zahlen definiert. Eine (zweistellige) Relation R auf einer Menge M (z.B. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$) ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Zwei Elemente $a, b \in M$ stehen in Relation $a \sim b$, wenn $(a, b) \in R$. Eine Relation kann verschiedene Eigenschaften haben:

- Reflexivität: Es gilt $a \sim a$ für alle $a \in M$.
- Transitivität: Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$ für alle $a, b, c \in M$.
- Symmetrie: Aus $a \sim b$ folgt $b \sim a$ für alle $a, b \in M$.
- Antisymmetrie: Aus $a \sim b$ und $b \sim a$ folgt $a = b$ für alle $a, b \in M$.

Aufgabe: Welche Eigenschaften erfüllt die Teilbarkeitsrelation $a \mid b$ auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$?

Eine Relation, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist, bezeichnen wir als Ordnungsrelation. Die Teilbarkeitsrelation ist also eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$. Eine Relation, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, wird als Äquivalenzrelation bezeichnet. Für die Teilbarkeitsrelation gilt weiterhin:

- Aus $a \mid c$ und $b \mid d$ folgt $ab \mid cd$ für alle $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$.
- Aus $a \mid b$ und $a \mid c$ folgt $a \mid xa + yb$ für alle $a, b, c, x, y \in \mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$.

In $\mathbb{Z}$ ist jede Zahl ein Teiler von 0 und jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ hat die Teiler 1, a, -1 und $-a$, die als triviale Teiler bezeichnet werden. Die übrigen Teiler heißen echte Teiler.

Aufgabe: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(a - 1) \mid (a^n - 1)$.

Teilbarkeitskriterien:

Wir stellen natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ in der Regel in der Dezimalschreibweise dar. Das bedeutet

$$n = (a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0)_{10} = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

Aus dieser Darstellung ergeben sich verschiedene Teilbarkeitskriterien.

Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- $2 \mid n$, wenn die letzte Ziffer a_0 durch 2 teilbar ist.
- $4 \mid n$, wenn die letzten beiden Ziffer $(a_1a_0)_{10}$ durch 4 teilbar sind.
- $5 \mid n$, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 ist.
- $8 \mid n$, wenn die letzten drei Ziffern $(a_2a_1a_0)_{10}$ durch 8 teilbar sind.
- $10 \mid n$, wenn die letzte Ziffer eine 0 ist.
- $25 \mid n$, wenn die letzten beiden Ziffern $(a_1a_0)_{10}$ durch 25 teilbar sind.

Aufgabe: Wie können wir diese Teilbarkeitskriterien mit unserem Wissen über die Teilbarkeitsrelation beweisen?

Es gibt auch andere Teilbarkeitskriterien, die eine etwas andere Form haben. Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme $a_k + a_{k-1} + ... + a_2 + a_2 + a_0$ durch 3 teilbar ist. Wir können dieses Kriterium beweisen indem wir die Zahl n geeignet umschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} n &= a_k10^k + a_{k-1}10^{k-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ &= a_k(\underbrace{10^k - 1}_{=9...9} + 1) + a_{k-1}(\underbrace{10^{k-1} - 1}_{=9..9} + 1) + ... + a_2(\underbrace{10^2 - 1}_{=99} + 1) + a_1(\underbrace{10 - 1}_{=9} + 1) + a_0 \\ &= a_k 9...9 + a_{k-1} 9..9 + ... + a_2 99 + a_1 9 + a_k + a_{k-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0. \end{aligned}$$

Mit genau der gleichen Argumentation kann man auch zeigen, dass eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Restklassen:

Wir könnten die Teilbarkeitseigenschaft auch anders definieren: Eine Zahl a ist Teiler von b, wenn bei der Teilung von b durch a kein Rest bleibt bzw. der Rest 0 bleibt. Wir wollen uns mit Restklassen beschäftigen, d.h. mit Klassen von Funktionen, die bei Division den gleichen Rest lassen.

Aufgabe: Wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ bei Teilung durch $n \in \mathbb{Z}$ den gleichen Rest lassen, dann gilt $n \mid a - b$.

Über diesen Zusammenhang lässt sich die Kongruenzrelation definieren. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen kongruent modulo n, wenn $n \mid a - b$ gilt. Wir schreiben $a \equiv b \mod n$ oder alternativ $a \equiv_n b$. Wenn a ein Teiler von b ist, dann gilt $b \equiv 0 \mod a$.

Aufgabe: Die Kongruenzrelation mod n ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

Die Kongruenzrelation mod n ist mit den gezeigten Eigenschaften ein Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzrelation zerteilt die zugrundeliegende Menge in Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklassen bzgl. der Kongruenzrelation mod n werden als Restklassen bezeichnet. In einer Restklasse liegen genau die Elemente, die bei Teilung durch n den gleichen Rest lassen. Eine wichtige Eigenschaft der Restklassen ist, dass wir mit ihnen rechnen können. Es gilt die Restklassenaddition:

- Wenn $a \equiv c \mod n$ und $b \equiv d \mod n$ gilt, dann folgt $a + b \equiv c + d \mod n$.

Aufgabe: Wenn $a \equiv c \mod n$ und $b \equiv d \mod n$ gilt, dann folgt $ab \equiv cd \mod n$. (Restklassenmultiplikation)

Aufgabe: Welcher Wochentag ist der 14.10. nächstes Jahr? Gibt es einen Zusammenhang zur Modulo-Rechnung?

Wir können die Modulo-Rechnung verwenden um Teilbarkeiten zu untersuchen. Wir wollen das Teilbarkeitskriterium für 3 mittels der Modulo-Rechnung zeigen. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist. Es gilt

$$10 \equiv 1 \mod 3, \quad 10^2 = 10 \cdot 10 \equiv 1 \mod 3, \quad \ldots \quad 10^k \equiv 1 \mod 3,$$

und damit

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 \mod 3.$$

Da die Quersumme von n durch 3 teilbar ist, gilt $a_k + a_{k-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 \equiv 0 \mod 3$ und damit auch $n \equiv 0 \mod 3$. Die Zahl n ist also durch 3 teilbar. Analog folgt, dass die Quersumme jeder durch 3 teilbaren Zahl auch durch 3 teilbar ist.

Aufgabe: Wie lauten die letzte Ziffer der Zahl $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6$?

Aufgabe: Wenn die ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ sich in der Form $n = (a+b)^2 + a - b$ mit natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ darstellen lässt, dann ist n gerade.

Pythagoreische Zahlentripel:

Gleichungen der Form

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

mit einer Polynomfunktion f mit ganzzahligen Koeffizienten werden als diophantische Gleichungen bezeichnet, wenn wir nur an ganzzahligen Lösungen der Gleichungen interessiert sind. Die Gleichungen sind nach Diophantos von Alexandria (um 250) benannt. Für lineare Gleichungen mit zwei Variablen x, y

$$ax + by = c$$

gibt es das Lagrange-Verfahren und die Eulersche Reduktionsmethode um die Lösungen zu bestimmen.

Wir wollen die (ganzzahligen) pythagoreischen Zahlentripel

$$x^2 + y^2 = z^2$$

betrachten. Für diese Gleichung gibt es unendlich viele ganzzahlige Lösungen, z.B. $x = 3$, $y = 4$ und $z = 5$, gemeinsame Vielfache dieser Zahlen, aber auch andere Kombinationen. Interessanterweise gibt es für die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \geq 3$$

nur die trivialen Lösungen, bei denen entweder x oder y gleich 0 ist. Die Fermatsche Vermutung, dass diese Aussage gilt, wurde ca. 1637 von Pierre de Fermat aufgestellt. Der sogenannte große Fermatsche Satz wurde aber erst 1994 von Andrew Wiles bewiesen.

Aufgabe: Eine der Zahlen x, y im pythagoreischen Zahlentripel muss durch 3 teilbar sein.

Aufgabe: Eine der Zahlen x, y, z im pythagoreischen Zahlentripel muss durch 5 teilbar sein.

Wir wollen nun eine Methode kennenlernen um pythagoreischen Zahlentripel zu bestimmen, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Wir stellen die Gleichung geeignet um

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y), \qquad 1 = \frac{z+y}{x} \cdot \frac{z-y}{x}.$$

Wir setzen nun

$$\frac{m}{n} = \frac{z+y}{x} \quad \text{und} \quad \frac{n}{m} = \frac{z-y}{x}$$

mit $m > n$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$z + y = \frac{m}{n}x \quad \text{und} \quad z - y = \frac{n}{m}x.$$

Durch Addition/Subtraktion der beiden Gleichungen erhalten wir

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}x + \frac{n}{m}x\right) = \frac{(m^2+n^2)x}{2mn}$$

und

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}x - \frac{n}{m}x\right) = \frac{(m^2-n^2)x}{2mn}.$$

Damit x, y, z ganzzahlig (und teilerfremd) werden, wählen wir $x = 2mn$. Wir erhalten die Formeln

$$x = 2mn, \qquad y = m^2 - n^2, \qquad z = m^2 + n^2.$$

Wenn wir wollen, dass x, y, z keinen gemeinsamen Teiler haben, dann können wir für m und n nur teilerfremde Zahlen verwenden.

Aufgabe: Eine der Zahlen x, y im pythagoreischen Zahlentripel muss durch 4 teilbar sein.

Übungsaufgaben zu Teilbarkeit und Restklassen

Aufgabe 1: Finde ein Teilbarkeitskriterium für die Teilbarkeit durch 11 und beweise das Teilbarkeitskriterium.

Aufgabe 2: Wie lauten die letzten zwei Ziffern der Zahl 7^{2020}? Wie lauten die letzten drei Ziffern?

Aufgabe 3: Die ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ lasse sich in der Form $n = (a+b)^2 + a - b$ mit natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ darstellen.

a) Zeige, dass n gerade ist.

b) Wie viele ganze Zahlen zwischen 1 und $2005 \cdot 2005$ besitzen eine solche Darstellung?

Aufgabe 4: Gibt es natürliche Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$, die die Gleichung $a^2 + b^2 = 8c - 2$ erfüllen?

Aufgabe 5: Es wurde festgestellt, dass $2^{3217} - 1$ eine Primzahl ist.

a) Wie lautet die letzte Ziffer der Zahl?

b) Wie viele Stellen hat die Zahl?

Lösungen der Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Eine natürliche Zahl $n = (a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0)_{10} \in \mathbb{N}$ ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme $a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^k a_k$ durch 11 teilbar ist. Wir können das Teilbarkeitskriterium mit Restklassen zeigen. Es gilt

$$10 \equiv -1 \mod 11, \quad 10^2 = 10 \cdot 10 \equiv 1 \mod 11, \quad 10^3 \equiv -1 \mod 11, ...$$

und damit

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + ... + a_k 10^k \equiv a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^k a_k \mod 11.$$

Alternativ können wir uns auch eine Umformulierung überlegen. Für 10^k mit geradem $k \in \mathbb{N}$ gilt $10^k = 10^k - 1 + 1 = 9..9 + 1$, wobei 9..9 eine gerade Anzahl an Stellen hat und damit durch 11 teilbar ist

$$99 = 9 \cdot 11, \quad 9999 = 909 \cdot 11, \quad 999999 = 90909 \cdot 11, \quad ...$$

Für 10^k mit ungeradem k gilt $10^k = 11 \cdot 10^{k-1} - 10^{k-1}$. Da $k - 1$ gerade ist, können wir die obige Zerlegung verwenden

$$10^k = 11 \cdot 10^{k-1} - 10^{k-1} = 11 \cdot 10^{k-1} - (\underbrace{9..9}_{11|9..9} + 1).$$

Wir erhalten

$$a_0 = a_0, \quad a_1 10 = -a_1 + 11a_1, \quad a_2 10^2 = a_2 + 99a_2, \quad a_3 10^3 = -a_3 + (1100 - 99)a_3, \quad ...$$

und damit den Zusammenhang der Teilbarkeit von n mit der Teilbarkeit der alternierenden Quersumme von n.
Eine weiterer Beweis verwendet den binomischen Lehrsatz (eine Verallgemeinerung der binomischen Formel). Wir verwenden

$$\begin{aligned} 10^k = (11-1)^k &= \binom{k}{0} 11^k (-1)^0 + \binom{k}{1} 11^{k-1} (-1)^1 + ... + \binom{k}{k-1} 11^1 (-1)^{k-1} + \binom{k}{k} 11^0 (-1)^k \\ &= \underbrace{11^k - k11^{k-1} + ... + (-1)^{k-1} k11}_{\text{durch 11 teilbar}} + (-1)^k. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Es gilt

$$\begin{aligned} 7^1 &\equiv 7 \mod 100, \\ 7^2 &\equiv 49 \mod 100, \\ 7^3 &\equiv 43 \mod 100, \\ 7^4 &\equiv 1 \mod 100. \end{aligned}$$

Die Potenzen von 7 durchlaufen also nur diese 4 Restklassen bzgl. der Kongruenz mod 100. Da die Potenz 2020 durch 4 teilbar ist, muss 7^{2020} mit den Ziffern 01 enden. Es gilt

$$\begin{aligned} 7^1 &\equiv 7 \mod 1000, \\ 7^2 &\equiv 49 \mod 1000, \\ 7^4 = 7^2 \cdot 7^2 = 49 \cdot 49 = 2401 &\equiv 401 \mod 100, \\ 7^5 = 7^4 \cdot 7 &\equiv 807 \mod 100, \\ 7^{10} = 7^5 \cdot 7^5 &\equiv 249 \mod 100, \\ 7^{20} = 7^{10} \cdot 7^{10} &\equiv 1 \mod 100. \end{aligned}$$

Damit endet 7^{2020} mit den Ziffern 001.

Aufgabe 3:

a) Wir können n wie folgt umformulieren

$$n = (a+b)^2 + a - b = a^2 + 2ab + b^2 + a - b = a(a+1) + b(b-1) + 2ab,$$

damit ist n gerade.

b) Zuerst zeigen wir, dass sich alle gerade Zahlen, die nicht die Form $m(m+1)$ mit $m \in \mathbb{N}$ haben, in der geforderten Form darstellen lassen. Setzen wir $c = a + b$, dann ist $1 \leq b \leq c - 1$ und $n = c(c+1) - 2b$. Für festes c durchlaufe b alle Zahlen von 1 bis $c - 1$, dann durchläuft n alle geraden Zahlen von $c(c+1) - 2(c-1) = (c-1)c + 2$ bis $c(c+1) - 2$. Betrachten wir statt c die nächstgrößere Zahl $c + 1$, dann durchläuft n die geraden Zahlen von $c(c+1) + 2$ bis $(c+1)(c+2) - 2$. Es wird also genau die gerade Zahl $c(c+1)$ nicht in dieser Form dargestellt. Sei nun $M = 2005$. Wegen $(M-1)M < M^2 < M(M+1)$ gibt es genau $M - 1$ gerade Zahlen zwischen 1 und M^2 mit der Form $m(m+1)$. Es lassen sich also $(M^2-1)/2-(M-1) = (M-1)^2/2$ Zahlen in der gewünschten Form darstellen. Für $M = 2005$ ergibt sich $2004^2/2 = 2004 \cdot 1002 = 2008008$.

Aufgabe 4: Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

- Fall 1: a und b sind gerade. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = 2m$ und $b = 2n$ und es folgt, dass die linke Seite der Gleichung $a^2 + b^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4(m^2 + n^2)$ durch 4 teilbar ist. Die rechte Seite ist aber nicht durch 4 teilbar.

- Fall 2: a ist gerade und b ist ungerade. Dann ist a^2 gerade und b^2 ungerade und damit $a^2 + b^2$ ungerade. Die rechte Seite der Gleichung ist aber gerade. Analog kann man den Fall mit ungeradem a und geradem b ausschließen.

- Fall 3: a und b sind ungerade. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = 2m - 1$ und $b = 2n - 1$. Wir schreiben die Gleichung als $a^2 + b^2 + 2 = 8c$. Es folgt

  $$a^2+b^2+2 = (2m-1)^2+(2n-1)^2+2 = 4m^2-4m+4n^2-4n+4 = 4m(m-1)+4n(n-1)+4 = 8c.$$

  Der Ausdruck $8c$ ist offensichtlich durch 8 teilbar und der Ausdruck $4m(m-1)+4n(n-1)+4$ nicht.

Es gibt also keine natürlichen Zahlen, die die Gleichung erfüllen. Der gleiche Ansatz kann auch mit der Modulo-Rechnung $\bmod 2$ durchgeführt werden.

Aufgabe 5:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} 2^1 &\equiv 2 \mod 10, \\ 2^2 &\equiv 4 \mod 10, \\ 2^3 &\equiv 8 \mod 10, \\ 2^4 &\equiv 6 \mod 10, \\ 2^5 &\equiv 2 \mod 10. \end{aligned}$$

Wegen $3217 \equiv 1 \mod 4$ endet 2^{3217} auf 2 und $2^{3217} - 1$ auf 1.

b) Wir verwenden den Logarithmus zur Basis 10

$$2^{3217} = 10^{\log_{10}(2^{3217})} = 10^{3217 \log_{10} 2}.$$

Im Dezimalsystem ist 10^n jeweils die kleinste $(n+1)$-stellige Zahl. Also müssen wir $3217 \log_{10} 2$ abrunden und 1 hinzuaddieren um die Anzahl an Stellen zu erhalten. 2^{3217} hat also 969 Stellen.

Wir könnten jetzt durch die Subtraktion von 1 noch eine Stelle verlieren, aber dann müsste $2^{3217} - 1$ auf 9 enden. Wir wissen aber aus Aufgabenteil a), dass die Zahl auf 1 endet, also hat $2^{3217} - 1$ auch 969 Stellen. Alternativ kann man sich auch überlegen, dass 2^{3217} um bei der Subtraktion von 1 eine Stelle „zu verlieren“ auf 0 enden müsste. Das kann aber nicht sein, da die Zahl nicht durch 5 teilbar ist.