Ungleichungstheorie

Peter Patzt

13. August 2006

Zusammenfassung

Dieser Skript ist begleitend zu einem Seminar geschrieben, das ich gehalten habe. Er soll einen Überblick über einige bekannte Ungleichungen, sowie der Majorisierungstheorie geben und die Zusammenhänge verschiedener Ungleichungen hervorheben. Der Großteil der Gedanken in diesem Script sind nicht von mir, sondern aus verschiedenen Büchern zusammengesammelt. Ich werde die einzelnen Beweisideen zu den jeweiligen Büchern referenzieren und auf eigene Ideen gesondert hinwiesen. Da einige von den Ungleichungen und ihre Beweise sehr bekannt sind, werde ich versuchen zu jeder Ungleichung den „Standard“-Beweis, sowie einen oder mehr weitere schöne noch nicht so bekannte Beweise anzugeben.

Viel Spaß beim Anschaun!

Inhaltsverzeichnis

1 Verschiedene Ungleichungen, die später gebraucht werden

Um eine Theorie aufzubauen, benötigt man auch ein paar Grundlagen und in diesem Fall ein paar Ungleichungen, die direkt auf den Grundlagen aufbauen. Diese Grundlagen sollen hier aber nicht weiter erörtert werden, sondern vorausgesetzt werden. Zum Nachlesen seien die ersten beiden Sektionen des 2. Kapitels in [3] angegeben.

Im Weiteren wird, wenn $t \in \mathbb{R}$ und $q, a \in \mathbb{R}^n$ angegeben ist, $\sum tqa = \sum_{i=1}^{n} tq_i a_i$. Am Anfang werde ich die Laufindizes noch mit angeben, dann aber nur noch verwenden, wenn es sonst zu Unklarheiten kommen könnte.

1.1 Homogenität und Symmetrie

Eine Ausnahme in Sachen Grundlagen, wollen wir machen, da diese Eigenschaften zu wichtigen, aber nicht im ersten Augenblick ersichtlichen Folgerungen führen.

Eine Ungleichung $U(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ heißt homogen, wenn sie für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ äquivalent zu $U(tx_1, \ldots, tx_n) \geq 0$ ist. In diesem Fall kann man $(x_1, \ldots, x_n)$ durch ein bestimmtes t so normalisieren, dass z.B. $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Ein Beispiel für ein homogene Ungleichung ist

$$U(a, b, c) = a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a + c) \geq 0,$$

denn

$$\begin{aligned} U(ta, tb, tc) &= (ta)^2 + 2(tb)^2 + (tc)^2 - 2tb(ta + tc) \\ = t^2 \left(a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a + c)\right) &\geq 0 \\ \Longleftrightarrow U(a, b, c) = a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a + c) &\geq 0 \end{aligned}$$

Eine Ungleichung $U(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ heißt symmetrisch, wenn sie für eine beliebige Permutation $\pi \in S_n$[1] äquivalent zu $U(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) \geq 0$ ist. In diesem Fall kann man annehmen, dass $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ der Größe nach geordnet sind oder man sie so umordnen kann. Ein Besipiel für eine symmetrische Ungleichung ist

$$U(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0,$$

denn

$$U(a, b, c) = U(a, c, b) = \cdots = U(c, b, a)$$

[1] S_n ist die Menge aller Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\cong} \{1, \ldots, n\}$

1.2 Andreescu-Ungleichung

Nun zur ersten Ungleichung in diesem Skript. Diese Ungleichung wird in [4] eigentlich nur als Lemma angeführt um die Cauchy-Ungleichung zu beweisen. Persönlich denke ich aber, dass sie vor allem für einige Olympiadeaufgaben (um die es in diesen Skript kaum gehen soll) sehr hilfreich ist. Sie wird nach dem Autor von [4] häufig als Andreescu-Ungleichung referenziert.

Ungleichung 1. *Für alle $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}_+^n$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} > \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{1.1}$$

, außer a und b sind linear abhängig, d.h. $\exists(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} : \mu a_i = \lambda b_i \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Wir wollen diesen Beweis induktiv führen. Zunächst beweisen wir die Ungleichung

$$\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{s} > \frac{(x+y)^2}{r+s} \tag{1.2}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $r, s \in \mathbb{R}_+$, wenn $xs - yr \neq 0$.

$$\begin{aligned} (xs - yr)^2 &> 0 \\ x^2 s^2 + y^2 r^2 &> 2xyrs \\ x^2 s(r+s) + y^2 r(r+s) &> rs(x+y)^2 \\ \overset{r,s \in \mathbb{R}_+}{\Longleftrightarrow} \frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{s} &> \frac{(x+y)^2}{r+s} \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\exists(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} : \mu x = \lambda r, \mu y = \lambda s \iff xs - yr = 0$.

Da bei $n = 1$ a und b offensichtlich linear abhängig sind und offensichtlich Gleichheit gilt, fangen wir bei dem Induktionsanfang $n = 2$ an. Dieser gilt wegen (1.2). Nehmen wir also an, die Ungleichung gilt für $n = k - 1$, dann gilt wegen (1.2):

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^2}{b_i} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i^2}{b_i} + \frac{a_k^2}{b_k} > \frac{\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k-1} b_i} + \frac{a_k^2}{b_k} > \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} b_i}$$

, außer $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ und $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ sowie $(\sum_{i=1}^{n-1} a_i, a_n)$ und $(\sum_{i=1}^{n-1} b_i, b_n)$ sind linear abhängig, d.h. a und b sind linear abhängig. □

1.3 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Bei der Cauchy-Schwarz-Ungleichung handelt es sich eigentlich um zwei Ungleichungen. Die Cauchy-Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

und die Schwarz-Ungleichung

$$\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \int_a^b g(x)^2 \mathrm{d}x \geq \left(\int_a^b f(x) g(x) \right)^2$$

. Wir wollen hier allerdings nur die Cauchy-Ungleichung betrachten.

Ungleichung 2. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^n \right) > \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \tag{1.3}$$

, außer wenn a und b linear abhängig sind.

Beweis. Wegen Ungleichung 1 gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n_+$, dass $\sum \left(\frac{x^2}{y} \right) > \frac{(\sum x)^2}{\sum y}$, außer wenn x und y linear abhängig sind. Setzen wir nun $y = b^2$ mit $b \in (\mathbb{R} \backslash \{0\})^n$ und dann $x = ab$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, so gilt:[2]

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{x^2}{y} \right) &> \frac{(\sum x)^2}{\sum y} \\ \sum \left(\frac{a^2 b^2}{b^2} \right) &> \frac{(\sum ab)^2}{\sum b^2} \\ \left(\sum a^2 \right) \left(\sum b^2 \right) &> \left(\sum ab \right)^2 \end{aligned}$$

, außer wenn x und y linear abhängig sind, bzw. wenn a und b linear abhängig sind, was offensichtlich äquivalent ist. Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Ungleichung gilt, falls $\exists b_i = 0$. Wenn $b = (0, \ldots, 0, b_n)$ mit $b \in \mathbb{R}$ sind a und b sind linear abhängig und es gilt Gleichheit. Es gibt also wenigstens zwei b_i, die nicht null sind. Nehmen wir an, dass ausschließlich die ersten m b null sind. ((1.3) ist symmetrisch in ab.) Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=m+1}^n b_i^2 \right) \\ &\geq \left(\sum_{i=m+1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=m+1}^n b_i^2 \right) \\ &> \left(\sum_{i=m+1}^n a_i b_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \end{aligned}$$

, außer $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ und $(b_{m+1}, \ldots, b_n)$ sind linear abhängig, d.h. a und b sind linear abhängig. □

[2] Wenn mehrere Vektoren so mit einander verknüpft werden, heißt es die Komponenten werden so mit einander verknüpft.

Wie versprochen sollen hier auch die bekanntesten Beweise angeführt werden.

Standardbeweis. Wir betrachten $a, b \in \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}$ und die quadratische Funktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i y - b_i x)^2 = \sum (a^2 y^2 - 2aby + b^2 x^2) = x^2 \sum b^2 - 2xy \sum ab + y^2 \sum a^2$$

, welche offensichtlich größer als null ist, wenn $\nexists (x, y) : a_i y - b_i x = 0 \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, d.h. wenn a und b nicht linear abhängig sind. Die Diskriminate D muss also negativ sein, insbesondere für $y = 1$:

$$0 > D = 4 \left(\sum ab \right)^2 - 4 \left(\sum a^2 \right) \left(\sum b^2 \right)$$

Daraus folgt sofort (1.3). In dem Fall, dass a und b linear abhängig sind, gibt es ein x_0, sodass $f(x_0) = 0$, also $D \geq 0$. Wegen $f(x) \geq 0$ gilt $D \leq 0$. Es folgt $D = 0$, sodass die Gleichheit bewiesen ist. □

1.4 einfache Tchebychev-Ungleichung

Diese Ungleichung wird hier wegen ihrer Anschaulichkeit und Nützlichkeit angeführt. Später wollen wir eine Verallgemeinerung finden.

Zum Beweis wollen wir zunächst die Rearrangement- oder Umordnungs-Ungleichung beweisen.

Ungleichung 3. *Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ aufsteigend geordnet und $\pi \in S_n$, dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\pi(i)} \tag{1.4}$$

Dies ist eigentlich einer der anschaulichsten Ungleichungen. Man würde schließlich, um seinen Gewinn zu maximieren, immer lieber mehr von großen Geldstücken als von kleinen Geldstücken nehmen.

Die Idee für den folgenden induktiven Beweis kommt aus [3].

Beweis. Für $n = 1$ ist die Ungleichung trivial. Wir nehmen also an, dass sie für $k \leq n$ die Ungleichung gilt. Sei also $n = k + 1$. Wenn $\pi(k + 1) = k + 1$, ist die Ungleichung äquivalent zu $n = k$. Wenn $\pi(k + 1) \neq k + 1$, gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq (a_{\pi(k+1)} - a_{k+1})(b_{\pi(k+1)} - b_{k+1}) \\
&= a_{\pi(k+1)} b_{\pi(k+1)} + a_{k+1} b_{k+1} - a_{k+1} b_{\pi(k+1)} - a_{\pi(k+1)} b_{k+1} \\
a_{\pi(k+1)} b_{\pi(k+1)} + a_{k+1} b_{k+1} &\geq a_{k+1} b_{\pi(k+1)} + a_{\pi(k+1)} b_{k+1} \\
&\geq a_{k+1} b_{\pi(k+1)} + a_{\pi(k+1)} b_{\pi(\pi(k+1))} \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Somit gilt für $n = k - 1$:

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + \dots a_{\pi(k+1)-1}b_{\pi(k+1)-1} + a_{\pi(k+1)+1}b_{\pi(k+1)+1} + \dots + a_nb_n \\ \geq \quad & a_1b_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(k+1)-1}b_{\pi(\pi(k+1)-1)} + a_{\pi(k+1)+1}b_{\pi(\pi(k+1)+1)} + \dots + a_nb_{\pi(n)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Wenn wir nun (1.5) und (1.6) mit einander addieren, bekommen wir genau die gewünschte Ungleichung. □

Kommen wir nun zur Ungleichung von Tchebychev.

Ungleichung 4. *Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ aufsteigend geordnet, dann gilt:*

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \tag{1.7}$$

Beweis. Der Beweis folgt fast sofort aus Ungleichung 3. Es seien $\pi_0, \dots, \pi_{n-1} \in S_n$ Permutationen, die ausschließlich zyklisch vertauschen, wobei π_k genau k-mal zyklisch in dieselbe Richtung tauscht. Dann gilt $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_ib_{\pi_k(i)}$. Addiert man also über alle k bekommt man (1.7).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \quad & \geq \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_{\pi_k(i)} \\ n\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) \quad & \geq \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \end{aligned}$$

□

1.5 einfache Bernoulli-Ungleichung

Diese Ungleichung wird hier nur aufgeführt, weil es einen einfachen induktiven Beweis gibt, für eine einfache Form, die sich auf natürlichen Zahlen beschränkt. Später soll sie verallgemeinert werden.

Ungleichung 5. *Sei $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $x > -1$, $x \neq 0$ und $n > 1$, dann gilt*

$$(1 + x)^n > 1 + nx \tag{1.8}$$

Beweis. Dies folgt für positive x einerseits aus dem Binomischen Satz. Andererseits wollen wir es induktiv zeigen.

Für $n = 2$ gilt, $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, weil $x \neq 0$. Nehmen wir also an, dass die Ungleichung für $n = k$ gilt. Es folgt

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k(1 + x) > (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 > 1 + (k + 1)x$$

□

2 Mittel-Ungleichungen

2.1 Einführung in Mittel

Bei Mitteln handelt es sich um Vektorfunktionen $\mathfrak{M}(a)$ mit $a \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$, wobei $\min a \leq \mathfrak{M}(a) \leq \max a$. Für die einzelnen Mittel, die wir einführen, müssen wir das also zunächst beweisen. In der Bezeichnung und in den Beweisen halten ich mich eng an [1]. Wenn nicht anders vermerkt, sind die Beweise in [1] zu finden.

$\mathfrak{A}$ sei das sogenannte arithmetische Mittel. Das arithmetische Mittel mit Einheitsgewichten sieht wie folgt aus:

$$\mathfrak{A}(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}\sum a \tag{2.1}$$

Das gewichtete arithmetische Mittel mit den Gewichten $p \in \mathbb{R}_+^n$ sieht so aus:

$$\mathfrak{A}(a,p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum pa}{\sum p} \tag{2.2}$$

Wenn $p_i = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, handelt es sich um (2.1). Da $\mathfrak{A}(a,p)$ in sich homogen ist, d.h. $\mathfrak{A}(a,tp) = \mathfrak{A}(a,p)$, können wir annehmen, dass $\sum p = 1$. Wir wollen also einfach schreiben:

$$\mathfrak{A}(a,q) = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i = \sum qa \qquad \text{mit} \sum q = 1 \tag{2.3}$$

Des Weiteren schreiben wir

$$\mathfrak{G}(a,q) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} = \prod a^q \qquad \text{mit} \sum q = 1 \tag{2.4}$$

für das gewichtete geometrische Mittel. Das geometrische Mittel mit Einheitsgewichten ergibt sich, wenn $q_i = \frac{1}{n}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Als nächstes wollen wir das sogenannte Potenzmittel für $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definieren.

$$\mathfrak{M}_r(a,q) = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } r < 0 \text{ und } \prod a = 0 \\ \left(\sum qa^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\mathfrak{A}(a^r,q)\right)^{\frac{1}{r}} & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.5}$$

Es ist offensichtlich dass $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{A}$. Wir wollen nun $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{G}$ setzen. Dazu folgender Satz.

Satz 6.

$$\lim_{r\to 0} \mathfrak{M}_r = \mathfrak{G} \tag{2.6}$$

Beweis. Dieser Beweis, mittels der l'Hôspital Regel, ist auf meinem eigenen Mist gewachsen, nachdem ich den Beweis in [1] nicht verstanden habe. Ich hoffe er enthält keinen ungewollten Fehler.

Berechnen wir zunächst einen Grenzwert für $a \in \mathbb{R}_+^n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{r}\ln\left(\sum q a^r\right)}{\sum (q \ln a)} &= \lim_{r\to 0} \frac{\ln\left(\sum q e^{r\ln a}\right)}{r\sum (q\ln a)} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ln\left(\sum q e^{r\ln a}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r\sum (q\ln a)} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{\sum q e^{r\ln a}}\left(\sum q(\ln a)e^{r\ln a}\right)}{\sum (q\ln a)} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\sum q(\ln a)a^r}{\left(\sum q a^r\right)\left(\sum q\ln a\right)} \\
&= \frac{\sum q\ln a}{\left(\sum q\right)\left(\sum q \ln a\right)} \\
&= \frac{1}{\sum q} = 1
\end{aligned}$$

Das heißt $\frac{1}{r}\ln\left(\sum q a^r\right) \to \sum (q\ln a)$, wenn $r \to 0$. Also gilt (wegen der Stetigkeit von e^x):

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \mathfrak{M}_r &= \lim_{r\to 0}\left(\sum q a^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}\ln(\sum q a^r)} \\
&= \lim_{r\to 0} e^{\sum (q\ln a)} \\
&= \prod e^{q\ln a} = \prod a^q = \mathfrak{G}
\end{aligned}$$

Nun wollen wir dies auch zeigen, wenn einige a_i null sind. Dann ist offensichtlich $\mathfrak{G} = 0$. Für $r < 0$ gilt auch $\mathfrak{M}_r = 0$. Sei nun $r > 0$, m die Anzahl der Komponenten von a, die null sind. Wenn $m = n$, ist das Resultat offensichtlich, ansonsten seien $j_1, \ldots, j_m$, sodass $\forall k : a_{j_k} > 0$. Dann seien $b, s \in \mathbb{R}_+^{n-m}$, sodass $\forall k : b_k = a_{j_k}$ und $s_k = q_{j_k}$. Es gilt nun

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} M_r(a,q) = \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left(\sum q a^r\right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left(\sum s b^r\right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left(\sum s\right)^{\frac{1}{r}} \mathfrak{M}_r(b,s) \overset{\sum s<1}{=} 0$$

Also gilt für alle $a \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ (2.6). □

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Potenzmittel ihrem Namen gerecht werden.

Satz 7. *Für alle $r \in \mathbb{R}$, für die nicht alle a_i gleich sind, gilt*

$$\min a < \mathfrak{M}_r(a) < \max a \tag{2.7}$$

ansonsten sind sie gleich.

Beweis. Hierzu beweisen wir diesen Satz zunächst für $r = 1$. Hier gilt nämlich $\sum qa = \mathfrak{A} = \mathfrak{A}\sum q \iff \sum q(a - \mathfrak{A}) = 0$. Wenn nicht alle a_i gleich sind, muss es also ein a_k geben, das größer, und ein a_j, das kleiner als $\mathfrak{A}$ ist. Dann gilt

$$\min a \leq a_j < \mathfrak{A} < a_k \leq \max a$$

Für $r = 0$ benutzen wir ähnliches Argument. $\prod a^q = \mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{\sum q} \iff \left(\frac{a}{\mathfrak{G}}\right)^q = 1$. Wenn nicht alle a_i gleich sind muss es also ein a_k geben das größer und ein a_j das kleiner als $\mathfrak{G}$ ist. Dann gilt

$$\min a \leq a_j < \mathfrak{G} < a_k \leq \max a$$

Ansonsten können wir $r > 0$ oder $a_i > 0 \forall i$ annehmen, da sonst $\mathfrak{M}_r = 0$. Das heißt $(\mathfrak{M}_r(a))^r = \mathfrak{A}(a^r)$. $(\mathfrak{M}_r(a))^r$ liegt also zwischen $(\min a)^r$ und $(\max a)^r$. □

Wir wollen schließlich eine weitere Eigenschaft von Potenzmitteln zeigen.

Satz 8.

$$\lim_{r \to -\infty} \mathfrak{M}_r = \min a \quad \textit{und} \quad \lim_{r \to \infty} \mathfrak{M}_r = \max a \tag{2.8}$$

Beweis. Wenn $a_k = \max a$ und $r > 0$, gilt offensichtlich

$$q_k^{\frac{1}{r}} a_k \leq \mathfrak{M}_r(a) \leq a_k$$

, sodass $\lim_{r \to \infty} \mathfrak{M}_r = \max a$ sofort folgt.

Falls $r < 0$ und ein $a_i = 0$ ist $\lim_{r \to -\infty} \mathfrak{M}_r = \min a$ trivial. Ansonsten gilt $\mathfrak{M}_{-r}(a) = \frac{1}{\mathfrak{M}_r(\frac{1}{a})}$, sodass $\max \frac{1}{a} = \frac{1}{\min a}$ für $a_i > 0 \forall i$. □

Wir wollen also zukünftig $\mathfrak{M}_\infty(a)$ für $\max a$ und $\mathfrak{M}_{-\infty}(a)$ für $\min a$ schreiben.

2.2 allg. Mittel-Ungleichung

Kommen wir nun zu einer der bekanntesten und am meisten benutzten Ungleichungen – die sogenannte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel, oder auch „AM-GM-Ungleichung". Wir gehen zunächst von Einheitsgewichten aus.

Ungleichung 9. *Sei $a \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$, dann gilt*

$$\frac{1}{n}\sum a > \left(\prod a\right)^{\frac{1}{n}} \tag{2.9}$$

, außer alle a_i sind gleich, in welchem Fall Gleichheit gilt.

Standardbeweis. Wegen $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0 \iff \frac{1}{2}(x + y) > \sqrt{xy}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$ und $x \neq y$, gilt (2.9) für $n = 2$.

Wir zeigen nun induktiv, dass (2.9) für $n = 2^k$ gilt. Nehmen wir also an, dass es für $n = 2^l$ gilt.

$$\frac{1}{2^{l+1}}\sum_{i=1}^{2^{l+1}} a_i \geq \frac{1}{2}\left(\left(\prod_{i=1}^{2^l} a_i\right)^{\frac{1}{2^l}} + \left(\prod_{i=2^l+1}^{2^{l+1}} a_i\right)^{\frac{1}{2^l}}\right) \geq \left(\prod_{i=1}^{2^{l+1}} a_i\right)^{\frac{1}{2^{l+1}}}$$

Mit Gleichheit ausschließlich wenn alle a_i gleich sind.

Wir wollen diese Ungleichung nun auch für n, die keine Zweierpotenzen sind, beweisen. Weil $\lim_{k\to\infty} 2^k = \infty$, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $n < 2^k$. Wir nehmen also ein solches k, für das wir wissen

$$\frac{1}{2^k}(x_1 + \cdots + x_n + \cdots + x_{2^k}) > (x_1 \cdots x_n \cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^k}}$$

Wir setzen nun $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = a_i$ und $\forall i \in \left\{n+1, \ldots, 2^k\right\} : x_i = \mathfrak{A}(a)$. Nun gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^k}(a_1 + \cdots + a_n + (2^k - n)\mathfrak{A}) &> \left(a_1 \cdots a_n \cdot \mathfrak{A}^{2^k-n}\right)^{\frac{1}{2^k}} \\
\frac{1}{2^k}(n\mathfrak{A} + (2^k - n)\mathfrak{A}) &> \left(\mathfrak{G}^n \cdot \mathfrak{A}^{2^k-n}\right)^{\frac{1}{2^k}} \\
\mathfrak{A} &> \mathfrak{G}^{\frac{n}{2^k}} \cdot \mathfrak{A}^{1-\frac{n}{2^k}} \\
\mathfrak{A}^{\frac{n}{2^k}} &> \mathfrak{G}^{\frac{n}{2^k}} \\
\mathfrak{A} &> \mathfrak{G}
\end{aligned}$$

, außer wenn $a_1 = \cdots = a_n = \mathfrak{A}$. □

Hier noch ein alternativer Beweis.

Beweis. Weil (2.9) symmetrisch ist, wir können $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ annehmen. Sei $\mathfrak{A}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i$ und $\mathfrak{G}_m = (\prod_{i=1}^m a_i)^{\frac{1}{m}}$.

Offensichtlich gilt $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{A}_k = \frac{(k-1)\mathfrak{A}_{k-1}+a_k}{k} = \mathfrak{A}_{k-1} + \frac{a_k-\mathfrak{A}_{k-1}}{k}$. Nun gilt aber wegen Ungleichung 5:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_k^k = \left(\mathfrak{A}_{k-1} + \frac{a_k - \mathfrak{A}_{k-1}}{k}\right)^k &= \mathfrak{A}_{k-1}^k\left(1 + \frac{a_k - \mathfrak{A}_{k-1}}{k\mathfrak{A}_{k-1}}\right)^k \\
\left(k > 1,\ \frac{a_k - \mathfrak{A}_{k-1}}{k\mathfrak{A}_{k-1}} > 0 \text{ für ein } k\right) &\geq \mathfrak{A}_{k-1}^k\left(1 + \frac{a_k - \mathfrak{A}_{k-1}}{\mathfrak{A}_{k-1}}\right) \\
&= \mathfrak{A}_{k-1}^k + \mathfrak{A}_{k-1}^{k-1}(a_k - \mathfrak{A}_{k-1}) \\
&= a_k\mathfrak{A}_{k-1}^{k-1} \geq a_k\mathfrak{G}_{k-1}^{k-1} = \mathfrak{G}_k^k
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt wieder offensichtlich nur, wenn alle a_i gleich sind.

□

Als nächstes wollen wir die Ungleichung mit Gewichten betrachten.

Ungleichung 10. *Sei* $a \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ *und* $q \in \mathbb{R}_+^n$*, dann gilt*

$$\mathfrak{A}(a,q) > \mathfrak{G}(a,q) \tag{2.10}$$

, außer alle a_i *sind gleich.*

Standardbeweis. Zunächst zeigen wir, dass (2.10) für $q \in \mathbb{Q}_+^n$ gilt. Dazu sei $N \in \mathbb{N}$ der Hauptnenner aller q_i. $\sum q = 1 \implies \sum Nq = N$. Daher wenden wir Ungleichung 9 $\mathfrak{A}(x) > \mathfrak{G}(x)$ für $n = N$ mit $x_1 = \cdots = x_{Nq_1} = a_1, \ldots, x_{N(1-q_n)+1} = \cdots = x_N = a_n$ an, woraus sofort die gewünscht Ungleichung entsteht.

Für $q \in \mathbb{R}_+^n$, können wir eine Folge $\{q^*\} \in \mathbb{Q}_+^n$ finden, die sich q annähert, sodass $\sum q^* = 1$. In diesem Grenzprozess wird das „$>$“ aber zu einem „$\geq$“. Wir wollen die entstandene Ungleichung mit „$\geq$“ aber trotzdem anwenden um die schäfere Variante zu zeigen. Dazu sei $q = q' + q''$ mit $q' \in \mathbb{Q}_+^n$ und $q'' \in \mathbb{R}_+^n$. Wegen $\sum q' + \sum q'' = \sum q = 1 \in \mathbb{Q}$ folgt, dass $\sum q', \sum q'' \in \mathbb{Q}$. So gilt:

$$\begin{aligned} \prod a^q = \left(\prod a^{q'}\right) \cdot \left(\prod a^{q''}\right) &< \left(\frac{\sum q'a}{\sum q'}\right)^{\sum q'} \cdot \left(\frac{\sum q''a}{\sum q''}\right)^{\sum q''} \\ &\leq \left(\sum q'\right) \frac{\sum q'a}{\sum q'} + \left(\sum q''\right) \frac{\sum q''a}{\sum q''} = \sum qa \end{aligned}$$

Gleichheit gilt also ausschließlich, wenn alle a_i gleich sind. □

Der Standardbeweis von Ungleichung 10 baut auf Ungleichung 9 auf. Hier noch ein netter Beweis, der auf Ungleichung 2 aufbaut.

Beweis. Nach Ungleichung 2 gilt für $r \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \left(\sum qa^r\right)^2 &< \sum q \sum qa^{2r} = \sum qa^{2r} \\ \left(\sum qa^r\right)^{\frac{1}{r}} &< \left(\sum qa^{2r}\right)^{\frac{1}{2r}} \\ \mathfrak{M}_r(a) &< \mathfrak{M}_{2r}(a) \end{aligned}$$

, außer q und qa^{2r}, d.h. $(1, \ldots, 1)$ und a sind linear abhängig, d.h. alle a_i sind gleich.

Wegen

$$\mathfrak{A}(a) = \mathfrak{M}_1(a) > \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(a) > \cdots > \lim_{k\to\infty} \mathfrak{M}_{2^{-k}}(a) = \mathfrak{G}(a)$$

gilt die Ungleichung 10. □

Bevor wir nun zum Hauptsatz dieses Kapitel, Ungleichung 12, kommen, beweisen wir nun noch die allgemeine Bernoulli-Ungleichung. Der Beweis hierfür stammt aus [3].

Ungleichung 11. *Sei* $x \in \mathbb{R}$*;* $x > -1$*;* $p \in \mathbb{R}_+$ *und* $p \neq 1$*, dann gilt*

$$(1+x)^p > 1 + px \qquad \text{für } p > 1 \tag{2.11}$$

$$(1+x)^p < 1 + px \qquad \text{für } p < 1 \tag{2.12}$$

, außer wenn $x = 0$.

Beweis. Zunächst sei $0 < p < 1$. Dann gilt nach Ungleichung 10, dass

$$p \cdot (1 + x) + (1 - p) \cdot 1 > (1 + x)^p \cdot 1^{1-p}$$

, außer $1 + x = 1 \iff x = 0$. Aus dieser Ungleichung folgt sofort (2.12).

Sei nun $p > 1$. Wenn $1 + px \leq 0$ ist (2.11) offensichlich erfüllt. Ansonsten gilt nach (2.12)

$$(1 + px)^{\frac{1}{p}} < 1 + \frac{1}{p} \cdot px = 1 + x$$

, außer $px = 0$, d.h. $x = 0$. (2.11) folgt sofort. □

Kommen wir nun zu der Ungleichung, um die sich das ganze Kapitel dreht – die Potenzmittelungleichung.

Ungleichung 12. *Sei $a \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$; $q \in \mathbb{R}_+^n$; $r, s \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ und $r > s$, dann gilt*

$$\mathfrak{M}_r(a, q) > \mathfrak{M}_s(a, q) \tag{2.13}$$

, außer alle a_i sind gleich oder $r, s \leq 0$ und $\exists a_i = 0$.

Beweis. Dieser Beweis stammt aus [3]. Wir werden später noch einen Beweis aus [1] nachvollziehen. Für den benötigen wir aber noch die Ungleichung 13.

Die Fälle $r = \infty$ bzw. $s = -\infty$ und $r = 1, s = 0$ haben wir schon mit den Sätzen 7, 8 und 10 bewiesen.

Für $r > 0$ gilt

$$\mathfrak{M}_r(a) = (\mathfrak{A}(a^r))^{\frac{1}{r}} > (\mathfrak{G}(a^r))^{\frac{1}{r}} = \mathfrak{G}(a) = \mathfrak{M}_0(a)$$

, außer alle a_i sind gleich.

Für $s < 0$ gilt

$$\mathfrak{M}_s(a) = (\mathfrak{A}(a^s))^{\frac{1}{s}} < (\mathfrak{G}(a^s))^{\frac{1}{s}} = \mathfrak{G}(a) = \mathfrak{M}_0(a)$$

, außer alle a_i sind gleich oder $\exists a_i = 0$.

Somit gilt (2.13) für alle $r \geq 0 \geq s$.

Es bleibt (2.13) für $0 < s < r$ zu zeigen, da sich durch Potenzieren mit -1 das Ungleichheitszeichen umdreht.

Wir setzen zunächst $p = \frac{r}{s} > 1$. Wenn $b = a^s$, dann gilt $b^p = a^r$. (2.13) ist dann äquivalent zu

$$\sum qb < \left(\sum qb^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

, außer alle b_i sind gleich.

Weil b in dieser Ungleichung homogen ist, können wir $\sum qb = 1$ setzen. Setzen wir nun $x = b - 1$, dann gilt

$$\sum qx = \sum q(b - 1) = \sum qb - 1 = 0$$

Wegen $x_i \geq -1$ und $p > 1$ gilt nach der Ungleichung 11

$$q_i b_i^p = q_i(1 + x_i)^p \geq q_i + p q_i x_i$$

, außer $x_i = b_i - 1 = 0$.

Summieren wir nun auf, heißt das

$$\sum q b^p > \sum (q + pqx) = \sum q + p \sum qx = \sum q = 1 = \left(\sum qb\right)^p$$

, außer alle $b_i = 1$. (D.h. alle a_i müssen gleich sind, weil wir b normalisiert haben.)

□

2.3 Hölder-Ungleichung

Die Hölder-Ungleichung gehört mit der Minkowski-Ungleichung (Ungleichung 16) auch zu einer der bekannteren Ungleichung. Sie wird hingegen in Olympiaden kaum verwendet. Wir beweisen sie hier um einen weiteren Beweis für die Ungleichung 12 zu finden.

Ungleichung 13. *Seien $a, b, \dots, l \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ m Vektoren und $\alpha, \beta, \dots, \lambda \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1$, dann gilt*

$$\sum a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda < \left(\sum a\right)^\alpha \left(\sum b\right)^\beta \cdots \left(\sum l\right)^\lambda \tag{2.14}$$

, außer alle Vektoren sind paarweise linear abhängig oder ein Vektor ist null.

Es ist interessant zu bemerken, dass wenn man

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix} \text{ durch } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{pmatrix}$$

und (n, m) durch (m, n) ersetzt, dass so folgende Ungleichung äquivalent ist.

Ungleichung 14. *Seien $a, b, \dots, l \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ m Vektoren und $\alpha, \beta, \dots, \lambda \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1$, dann gilt*

$$\mathfrak{G}(a + b + \cdots + l) < \mathfrak{G}(a) + \mathfrak{G}(b) + \cdots + \mathfrak{G}(l) \tag{2.15}$$

, außer alle Vektoren sind paarweise linear abhängig oder $\exists i : a_i = b_i = \cdots = l_i = 0$.

Wir wollen uns aber an Ungleichung 13 halten, um die Hölder-Ungleichung zu beweisen.

Beweisidee. Weil dieser Beweis sehr ähnlich dem Standardbeweis für Ungleichung 10 geht, wollen wir hier nur den Anfang ausführlich betrachten.

Nach Ungleichung 2 gilt:

$$\left(\sum ab\right)^2 < \left(\sum a^2\right)\left(\sum b^2\right)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left(\sum \underbrace{ab\cdots l}_{2^m}\right)^{2^m} &\le \left(\sum \underbrace{a^2b^2\cdots f^2}_{2^{m-1}}\right)^{2^{m-1}} \left(\sum \underbrace{g^2\cdots l^2}_{2^{m-1}}\right)^{2^{m-1}} \\
&\le \cdots \le \left(\sum a^{2^m}\right)\left(\sum b^{2^m}\right)\cdots\left(\sum l^{2^m}\right)
\end{aligned}$$

Wobei die Gleichheit für alle nur gilt, wenn alle Vektoren paarweise linear abhängig sind oder ein Vektor null ist.

Sei nun $M < 2^m$, so setzen wir die 2^m Vektoren $A, B, \ldots, L \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ wie folgt, wobei $a, b, \ldots, g \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ M Vektoren sind.

$$\begin{gathered}
A^{2^m} = a^M, \ldots, G^{2^m} = g^M \\
H^{2^m} = \cdots = L^{2^m} = ab\cdots g
\end{gathered}$$

Nun ist offensichtlich $AB\cdots L = ab\cdots g$. Es folgt also

$$\begin{aligned}
\left(\sum ab\cdots g\right)^{2^m} &= \left(\sum AB\cdots L\right)^{2^m} \\
&< \left(\sum A^{2^m}\right)\left(\sum B^{2^m}\right)\cdots\left(\sum L^{2^m}\right) \\
&= \left(\sum a^M\right)\left(\sum b^M\right)\cdots\left(\sum g^M\right)\left(\sum ab\cdots g\right)^{2^m-M} \\
\iff \left(\sum ab\cdots g\right)^{M} &< \left(\sum a^M\right)\left(\sum b^M\right)\cdots\left(\sum g^M\right)
\end{aligned}$$

, außer, wenn alle Vektoren paarweise linear abhängig sind oder ein Vektor null ist, dann gilt Gleichheit.

Wenn man a^M durch a usw. ersetzt, ergibt sich genau ein Spezialfall von der Ungleichung 13. Der Rest ergibt sich durch fast gleiche Betrachtung wie im Standardbeweis für Ungleichung 10. □

Nun noch ein kurzer und eleganterer Beweis mittels der Ungleichung 10.

Beweis. Dass Gleichheit gilt, wenn ein Vektor null ist, ist offensichtlich. Wir nehmen also an, dass kein Vektor null ist. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\sum a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda}{\left(\sum a\right)^\alpha \left(\sum b\right)^\beta \cdots \left(\sum l\right)^\lambda} &= \sum \left(\frac{a}{\sum a}\right)^\alpha \left(\frac{b}{\sum b}\right)^\beta \cdots \left(\frac{l}{\sum l}\right)^\lambda \\
&< \sum \left(\alpha\frac{a}{\sum a} + \beta\frac{b}{\sum b} + \cdots + \lambda\frac{l}{\sum l}\right) \\
&= \alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1
\end{aligned}$$

Außer wenn $\forall i : \frac{a_i}{\sum a} = \frac{b_i}{\sum b} = \cdots = \frac{l_i}{\sum l}$, d.h. wenn alle Vektoren sind linear unabhängig, dann gilt Gleichheit. □

Wie versprochen, wollen wir hier noch einen weiteren Beweis für die Ungleichung 12 mittels der Ungleichung 13.

Beweis. Hier wollen wir uns auf den Fall $0 < s < r$ beschränken, da wir die anderen Fälle aus dem ersten Beweis übernehmen. Wie zuvor können wir dabei $s = 1$ setzen, da man a durch $a^{\frac{1}{r}}$ ersetzen und dann mit r potenzieren kann. Nach der Ungleichung 13 gilt nun

$$\mathfrak{M}_1(a) = \sum qa = \sum (qa^r)^{\frac{1}{r}} q^{1-\frac{1}{r}} < \left(\sum qa^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum q\right)^{1-\frac{1}{r}} = \left(\sum qa^r\right)^{\frac{1}{r}} = \mathfrak{M}_r(a)$$

, außer wenn qa^s und q linear unabhängig sind, d.h. wenn alle a_i gleich sind. □

2.4 Minkowski-Ungleichung

Diese Ungleichung ist eine interessante Verallgemeinerung von Ungleichung 14. Außerdem können aus ihr einige Dreiecksungleichungen abgeleitet werden.

Doch bevor wir diese beweisen, schauen wir uns ein interessantes und hilfreiches Resultat der Ungleichung 13 an.

Ungleichung 15. *Wenn $k, k' \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ mit $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ dann gilt*

$$\sum ab < \left(\sum a^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum b^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \qquad \text{für } k > 1 \tag{2.16}$$

und

$$\sum ab > \left(\sum a^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum b^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \qquad \text{für } k < 1 \tag{2.17}$$

, außer a^k und $b^{k'}$ sind linear abhängig oder $k < 1$ und ab ist null.

Der erste Teil des Beweises ist offensichtlich, der zweite hingegen ist in Anlehnung an den Beweis von Ungleichung 11 der Einfachheit halber auf meinem Mist gewachsen.

Beweis. Für $k > 1$ ist (2.16) eine einfache Folgerung aus Ungleichung 13 mit $n = 2$.

Für $k < 1$ gilt nun Folgendes. Wenn $0 < k < 1$, dann folgt $1 < \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k'} \implies k' < 0$ und umgekehrt. Wir können also $0 < k < 1$ annehmen. Außerdem gilt $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1 \implies \frac{k}{k'} = k - 1$ und $k' = \frac{k}{k-1}$. Nach (2.16) gilt also

$$\begin{aligned}
\sum a^k = \sum (ab)^k b^{-k} &< \left(\sum \left((ab)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)^k \left((b^{-k})^{\frac{1}{1-k}}\right)^{1-k} \\
&= \left(\sum ab\right)^k \left(\sum b^{\frac{k}{k-1}}\right)^{-(k-1)} = \left(\sum ab\right)^k \left(\sum b^{k'}\right)^{-\frac{k}{k'}} \\
\iff \left(\sum a^k\right)^{\frac{1}{k}} &< \left(\sum ab\right) \left(\sum b^{k'}\right)^{-\frac{1}{k'}} \\
\iff \sum ab &> \left(\sum a^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum b^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}
\end{aligned}$$

$\square$

Ungleichung 16. *Seien $a, b, \ldots, l \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$ und $r \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, dann gilt*

$$\mathfrak{M}_r(a+b+\cdots+l) < \mathfrak{M}_r(a)+\mathfrak{M}_r(b)+\cdots+\mathfrak{M}_r(l) \qquad \text{für } r>1 \tag{2.18}$$

und

$$\mathfrak{M}_r(a+b+\cdots+l) > \mathfrak{M}_r(a)+\mathfrak{M}_r(b)+\cdots+\mathfrak{M}_r(l) \qquad \text{für } r<1 \tag{2.19}$$

, außer alle Vektoren sind paarweise linear abhängig oder $r \leq 0$ und $\exists i : a_i = b_i = \cdots = l_i = 0$.

Beweis. Sei $\forall i : s_i = a_i + b_i + \cdots + l_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_r(s)^r = \sum qs^r &= \sum qas^{r-1} + \sum qbs^{r-1} + \cdots + \sum qls^{r-1} \\ &= \sum \left(q^{\frac{1}{r}}a\right)\left(q^{\frac{1}{r}}s\right)^{r-1} + \sum \left(q^{\frac{1}{r}}b\right)\left(q^{\frac{1}{r}}s\right)^{r-1} + \cdots + \sum \left(q^{\frac{1}{r}}l\right)\left(q^{\frac{1}{r}}s\right)^{r-1} \end{aligned}$$

Für $r > 1$ können wir nun Ungleichung 15 anwenden. Demnach ist

$$\sum \left(q^{\frac{1}{r}}a\right)\left(q^{\frac{1}{r}}s\right)^{r-1} < \left(\sum qa^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum \left(\left(q^{\frac{1}{r}}s\right)^{r-1}\right)^{\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}} = \mathfrak{M}_r(a)\mathfrak{M}_r(s)^{r-1}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_r(s)^r &< \mathfrak{M}_r(a)\mathfrak{M}_r(s)^{r-1} + \mathfrak{M}_r(b)\mathfrak{M}_r(s)^{r-1} + \cdots + \mathfrak{M}_r(l)\mathfrak{M}_r(s)^{r-1} \\ &= \mathfrak{M}_r(s)^{r-1}\left(\mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b) + \cdots + \mathfrak{M}_r(l)\right) \\ \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_r(s) &< \mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b) + \cdots + \mathfrak{M}_r(l) \end{aligned}$$

, außer alle Vektoren $q^{\frac{1}{r}}a, q^{\frac{1}{r}}b, \ldots, q^{\frac{1}{r}}l$ sind linear abhängig von $\left(q^{\frac{1}{r}}s\right)^{r-1}$, d.h. alle Vektoren sind paarweise linear abhängig.

Für $r < 1$ und $r \neq 0$ kann man Ungleichung 15 analog anwenden. Man muss nur aufpassen, dass bei $r < 0$ auch Gleichheit entsteht, wenn eine Komponente in allen Vektoren null ist, da dann alle Mittel null werden. Auch bei einigen Komponenten null muss man aufpassen. Das macht aber offensichtlich keine Probleme. Den Fall $r = 0$ haben wir, wie gesagt, schon bewiesen. $\square$

2.5 allg. Tchebychev-Ungleichung

Zum Beweis wollen wir zunächst einen Zusammenhang zwischen zwei Vektoren einführen. Zwei Vektoren $a, b \in M \subset \mathbb{R}^n$ heißen *gleichgeordnet*, falls $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$: $(a_i - b_i)(a_j - b_j) \geq 0$. Sie heißen *entgegengesetzt geordnet*, falls das „$\geq$" ein „$\leq$" ist.

Ungleichung 17. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gleichgeordnet, so gilt*

$$\mathfrak{M}_r(a)\mathfrak{M}_r(b) < \mathfrak{M}_r(ab) \tag{2.20}$$

, außer wenn alle a_i oder alle b_i gleich sind. Sind a, b entgegengesetzt geordnet, wird das Ungleichheitszeichen umgedreht.

Weil $\mathfrak{M}_r(a) = (\mathfrak{A}(a^r))^{\frac{1}{r}}$, ist

$$\mathfrak{A}(a)\mathfrak{A}(b) < \mathfrak{A}(ab)$$

zu (2.20) äquivalent. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(ab) - \mathfrak{A}(a)\mathfrak{A}(b) &= \sum qab - \left(\sum qa\right)\left(\sum qb\right) = \left(\sum q\right)\left(\sum qab\right) - \left(\sum qa\right)\left(\sum qb\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i q_j a_j b_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i a_i q_j b_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (q_i q_j a_j b_j - q_i a_i q_j b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (q_j q_i a_i b_i - q_j a_j q_i b_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (q_i q_j a_j b_j - q_i a_i q_j b_j + q_j q_i a_i b_i - q_j a_j q_i b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i q_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) > 0
\end{aligned}$$

, außer wenn alle a_i oder alle b_i gleich sind. Der Beweis für zwei entgegengesetzt geordnete Vektoren geht analog.

3 Majorisierungstheorie

In diesem Kapitel wollen wir die Eigenschaft der Majorisierung vorstellen und einige Sätze und Ungleichungen in diesem Zusammenhang beweisen. Es interessant, dass die Bedingung, dass ein Vektor einen anderen majorisiert, notwendig *und* hinreichend für einige wichtige Ungleichungen ist.

3.1 Einführung in majorisierende Vektoren

Wir wollen also zunächst definieren, was Majorisierung bedeutet. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sagen wir, x *majorisiert* y und schreiben $x \succ y$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt werden. Falls x und y so geordnet sind, dass

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \quad \text{und} \quad y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n, \tag{3.1}$$

gilt x majorisiert y, falls

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i \qquad \forall k \in \{1, \dots n-1\} \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{3.3}$$

Wenn x' und y' anders angeordnet sind, majorisiert x' y', falls für die Permutationen x und y von x' und y', für die (3.1) gilt, auch $x \succ y$ gilt.[1]

Hier soll nun eine äquivalente Bedingung zur Majorisation vorgestellt werden, womit einige Beweise etwas vereinfacht werden können.

Ungleichung 18. [2] *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. $x \succ y$ genau dann, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$*

$$\sum_i |x_i - a| \geq \sum_i |y_i - a| \tag{3.4}$$

Beweis. Sei zunächst sei $x \succ y$. Wegen der Symmetrie können wir auch $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ und $y_1 \geq \cdots \geq y_n$ annehmen. Nehmen wir also an, dass $y_k \geq a \geq y_{k+1}$, wobei k auch 0

[1] Um das Konzept von Majorisierung besser verstehen zu können, wollen uns x und y als Aufteilung einer Menge vorstellen, wobei, wenn $x \succ y$, diese Menge mit y gleichmäßiger verteilt wird.

[2] Dieses Kriterium, das eigentlich eine Ungleichung ist, ist im Zusammenhang mit der Unlgeichung 23 zu sehn, da $f(x) = |x - a|$ konvex ist. Dazu später mehr.

oder n sein kann, und dann größer bzw. kleiner als alle y ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|x_i-a| &\geq \sum_{i=1}^{k}(x_i-a)+\sum_{i=k+1}^{n}(a-x_i)=(n-2k)a+\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{n}x_i \\
&= (n-2k)a+\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i \\
&= (n-2k)a+2\sum_{i=1}^{k}x_i-2\sum_{i=1}^{k}y_i+\sum_{i=1}^{k}y_i-\sum_{i=k+1}^{n}y_i \\
&\geq (n-2k)a+\sum_{i=1}^{k}y_i-\sum_{i=k+1}^{n}y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}|y_i-a|
\end{aligned}$$

Gelte nun (3.4). Also gilt auch folgendes.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}x_i \geq \sum_{i=1}^{n}y_i \qquad &, \text{wenn } a \leq x_n \\
\sum_{i=1}^{n}x_i \leq \sum_{i=1}^{n}y_i \qquad &, \text{wenn } a \geq x_1
\end{aligned}$$

Es folgt also (3.3).

Für (3.2) nehmen wir $x_k \geq a \geq x_{k+1}$ an. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|x_i-a| &\geq \sum_{i=1}^{n}|y_i-a| \\
(n-2k)a+\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{n}x_i &\geq \sum_{i=1}^{n}|y_i-a| \geq (n-2k)a+\sum_{i=1}^{k}y_i-\sum_{i=k+1}^{n}y_i \\
2\sum_{i=1}^{k}x_i &\geq 2\sum_{i=1}^{k}y_i
\end{aligned}$$

□

3.2 Doppel-stochastische Matrizen und die T-Transformation

Eine Matrix $P=(p_{ij})\in(\mathbb{R}_+\cup\{0\})^{n\times n}$ heiße *doppel-stochastisch*, wenn

$$\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=1 \quad \forall j\in\{1,\dots,n\} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{n}p_{ij}=1 \quad \forall i\in\{1,\dots,n\} \tag{3.5}$$

Man erkennt, dass diese beiden Bedingungen äquivalent zu

$$P\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad (1,1,\dots,1)P=(1,1,\dots,1) \tag{3.6}$$

sind.

Ein wichtiges Beispiel für doppel-stochastischen Matrizen sind solche Matrizen, die Vektoren permutieren, d.h. dass sich in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 und den Rest Nullen befinden. Wichtig ist auch die Eigenschaft, dass Matrizen, die das Produkt zweier doppel-stochastischen Matrizen sind, auch doppel-stochastisch sind.[3]

Wir wollen nun ein wichtiges Ergebnis über Majorisierung zeigen, dass uns besonders bei Ungleichung 23 helfen wird.

Satz 19. *Die Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann doppel-stochastisch, wenn für alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $y \succ yP$.*

Beweis. Gelte zunächst $y \succ yP$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, dann gilt es auch für $e = (1,\dots,1)$. Also $e \succ eP$. Der einzige Vektor, den e majorisiert, ist aber e selber. Also ist $eP = e$. Nun setzen wir $y = e_k$ (d.h. $y_k = 1$ und $y_i = 0$, wenn $i \neq k$). Dann gilt $e_k \succ (p_{1k},\dots,p_{nk})$. Das heißt $\sum_{i=1}^n p_{ik} = 1$, was $Pe' = e'$ bedeutet. Außerdem heißt es, dass $p_{ij} \geq 0$, weil $a \succ b$ $\min a \leq \min b$ impliziert.

Sei P nun doppel-stochastisch. Außerdem sei $x = yP$ mit $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ und $y_1 \geq \cdots \geq y_n$. Falls das nicht so ist, können wir P durch $Q^{-1}PR$, x durch xR und y durch yQ ersetzen, wobei Q und R Permutationen sind, dass die obrigen Bedingungen erfüllt sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k x_i &= \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^n y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^n y_j t_j\\ &\qquad ,\text{wobei } 0 \leq t_j = \sum_{i=1}^k p_{ij} \leq 1 \text{ und } \sum_{j=1}^n t_j = k\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k x_i - \sum_{i=1}^k y_i &= \sum_{j=1}^n y_j t_j - \sum_{j=1}^k y_j = \sum_{j=1}^n y_j t_j - \sum_{j=1}^k y_j + y_k\left(k - \sum_{j=1}^n t_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^n (y_j - y_k)t_j - \sum_{j=1}^k (y_j - y_k)\\ &= \sum_{j=1}^k (y_j - y_k)(t_j - 1) + \sum_{j=k+1}^n (y_j - y_k)t_j \leq 0\end{aligned}$$

Wegen $\sum_{i=1}^n x_i = yPe' = ye' = \sum_{i=1}^n y_i$, gilt nun $y \succ x = yP$. □

[3]Das folgt einfach aus der Multiplikation von Matrizen.

Hier noch ein einfacher Beweis von $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist doppel-stochastisch $\implies y \succ yP$ für alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^n$ mittels Satz 18.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_i |\sum_j y_j p_{ij} - a| &= \sum_i |\sum_j p_{ij}(y_j - a)| \\
&\leq \sum_i \sum_j p_{ij}|y_j - a| = \sum_j |y_j - a| \sum_i p_{ij} \\
&= \sum_j |y_j - a|
\end{aligned}$$

□

Eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heiße *T-Transformation*, falls $T = \lambda E + (1-\lambda)Q$, wobei $\lambda \in (0,1)$, $Ey = y$ und $yE = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, und Q genau zwei Komponenten vertauscht.

Offenstichtlich ist T doppel-stochastisch. Wir kommen nun zu einer fundamentalen Eigenschaften von majorisierenden Vektoren.

Satz 20. *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, sodass $x \succ y$, so ist y ein Produkt einer endlichen Anzahl von T-Transformationen und x.*

Beweis. O.B.d.A. können wir $x \neq y$, $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ und $y_1 \geq \cdots \geq y_n$ annehmen. Seien nun j der größte Index, sodass $x_j > y_j$ und m der kleinste, sodass $x_m < y_m$. Wir nehmen nun $\lambda = \max\left(\frac{y_j - x_m}{x_j - x_m}, \frac{x_j - y_m}{x_j - x_m}\right)$.[4] Sei $T = \lambda E + (1-\lambda)Q$, wobei Q genau die j. und die m. Komponente austauscht. Dann ist

$$\begin{aligned}
x' = xT &= (x_1, \ldots, x_{j-1}, \frac{y_j - x_m}{x_j - x_m}x_j + \frac{x_j - y_j}{x_j - x_m}x_m, \ldots, \frac{y_j - x_m}{x_j - x_m}x_m + \frac{x_j - y_j}{x_j - x_m}x_j, x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
&= (x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, \ldots, x_j + x_m - y_j, x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
&\text{oder} \\
x' = xT &= (x_1, \ldots, x_{j-1}, \frac{x_j - y_m}{x_j - x_m}x_j + \frac{y_m - x_m}{x_j - x_m}x_m, \ldots, \frac{x_j - y_m}{x_j - x_m}x_m + \frac{y_m - x_m}{x_j - x_m}x_j, x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
&= (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + x_m - y_m, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

D.h. x' hat wenigstens eine Kompontente mehr gleich mit y als x. Wir wollen nun $x' \succ y$ nachweisen, damit wir diese Induktion fortführen können. (3.1) und (3.3) sind weiterhin gegeben. (3.2) ist für $k < j$ und $k > m$ klar. Für $k = j$ ist $x'_j = y_j$ oder $x'_j = x_j + x_m - y_m \geq y_j$, weil $\frac{x_j - y_m}{x_j - x_m} \geq \frac{y_j - x_m}{x_j - x_m}$. Für $k = m$ gilt analoge Überlegung. Da für $j < i < m$ $x'_i = x_i = y_i$ gilt (3.2). Somit können wir diese Transformationen fortführen. □

[4] Dann ist nämlich $\lambda x_j + (1-\lambda)x_m \geq \lambda x_m + (1-\lambda)x_j \iff \lambda \geq \frac{1}{2}$, denn $\frac{y_j - x_m}{x_j - x_m} + \frac{x_j - y_m}{x_j - x_m} = \frac{y_j - x_m + x_j - y_m}{x_j - x_m} = 1 + \frac{y_j - y_m}{x_j - x_m} \geq 1$.

Aus Satz 19 und 20 folgt sofort

Satz 21. *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. $x \succ y$ genau dann, wenn es eine doppel-stochastische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mit $y = xP$ gibt.*

3.3 Karamata-Ungleichung

Um mit dieser Ungleichung umgehen zu können, wollen wir zunächst den Begriff der Konvexität definieren. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ [5] heiße *konvex*, falls $\forall x, y \in I; \lambda \in [0; 1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.[6]

Eine einfache Folgerung, mit der man eine große Anzahl an Ungleichungen beweisen kann ist die Jensen-Ungleichung.

Ungleichung 22. *Seien $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $x \in I^n$ und $p \in \mathbb{R}^n_+$. Dann gilt*[7]

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geq \left(\sum p\right) \cdot f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{\sum p}\right) \tag{3.7}$$

Beweis. Wir beweisen diese Ungleichung induktiv. Für $n = 2$ gilt

$$\frac{p_1}{p_1+p_2} f(x_1) + \frac{p_2}{p_1+p_2} f(x_2) \geq f\left(\frac{p_1}{p_1+p_2} x_1 + \frac{p_2}{p_1+p_2}\right)$$

, weil $\frac{p_1}{p_1+p_2} + \frac{p_2}{p_1+p_2} = 1$, was äquivalent zu (3.7) für $n = 2$ ist.

Nehmen wir also an, dass (3.7) für $n = k$ gilt. Für $n = k + 1$ gilt nun folgendes.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} p_i f(x_i) &\geq \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) \cdot f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i}\right) + p_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&\geq \left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i\right) \cdot f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} p_i}{\sum_{i=1}^{k+1} p_i}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i}\right) + \frac{p_{k+1}}{\sum_{i=1}^{k+1} p_i} x_{k+1}\right) \\
&\geq \left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i\right) \cdot f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{p_i x_i}{\sum_{i=1}^{k+1} p_i}\right)
\end{aligned}$$

□

Eine weitere sehr nützliche Ungleichung zu konvexen Funktionen ist die Karamata-Ungleichung. Sie ist eine weitere Äquivalenz zur Majorisierung, die wir hier betrachten wollen.

[5] $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Interval auf dem f definiert ist.

[6] Diese Definition impliziert die Stetigkeit auf I, in [1] gibt es auch eine Definiton, die nicht-stetige Funktionen zulässt.

[7] Wenn $\forall x, y \in I; \lambda \in [0; 1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ heißt eine Funktion *konkav*. Offensichtlich gilt die Ungleichung 22 für konkave Funktionen mit umgedrehten Ungleichheitszeichen. Im Weiteren wird selbiges für alle Ungleichungen über konvexe Funktionen gelten und nicht mehr erwähnt werden.

Ungleichung 23. *Seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x,y\in\mathbb{R}^n$. Dann gilt $x\succ y$ genau dann, wenn für jede konvexe Funktion f gilt*

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\geq\sum_{i=1}^n f(y_i) \tag{3.8}$$

Beweis. Es gelte $x\succ y$. Wegen Satz 21 und Ungleichung 22 gilt

$$\begin{aligned}\sum_i f(y_i) &= \sum_i\left(\sum_k p_{ik}\right)f\left(\sum_j\frac{p_{ij}x_j}{\sum_k p_{ik}}\right)\\ &\leq \sum_i\sum_j p_{ij}f(x_j)=\sum_j f(x_j)\sum_i p_{ij}\\ &= \sum_j f(x_j)\end{aligned}$$

Nun gelte (3.8) für alle konvexen Funktionen, d.h. auch für alle $f_a(x)=|x-a|$. Damit gilt nach Satz 18 $x\succ y$. □

Beweis. Wegen Satz 20 brauchen wir (3.8) nur für $y=xT$ zeigen. Dann benötigen wir nicht Ungleichung 22, sondern können auf die Definition von Konvexität zurückgreifen.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(y_i) &= \sum_{i=3}^n f(x_i)+f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\\ &\leq \sum_{i=3}^n f(x_i)+\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)+\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)\\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i)\end{aligned}$$

□

3.4 Muirhead-Ungleichung

Ungleichung 24. *Seien $x,y\in\mathbb{R}^n$. Dann gilt $x\succ y$ genau dann, wenn für jeden Vektor $a\in\mathbb{R}^n_+$ gilt*

$$\sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^n a_{\pi(i)}^{x_i}\geq\sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^n a_{\pi(i)}^{y_i} \tag{3.9}$$

Beweis. Wie im zweien Beweis von der Ungleichung 23, wollen wir $y=xT$ annehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^n a_{\pi(i)}^{x_i}-\sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^n a_{\pi(i)}^{y_i} &= \sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=3}^n a_{\pi(i)}^{x_i}\left(a_{\pi(1)}^{x_1}a_{\pi(2)}^{x_2}-a_{\pi(1)}^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}a_{\pi(2)}^{\lambda x_2+(1-\lambda)x_1}\right)\\ &= \sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=3}^n a_{\pi(i)}^{x_i}\left(a_{\pi(1)}^{x_2}a_{\pi(2)}^{x_1}-a_{\pi(1)}^{\lambda x_2+(1-\lambda)x_1}a_{\pi(2)}^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=3}^{n} a_{\pi(i)}^{x_i}\left(a_{\pi(1)}^{x_2}a_{\pi(2)}^{x_1} - a_{\pi(1)}^{\lambda x_2+(1-\lambda)x_1}a_{\pi(2)}^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=3}^{n} a_{\pi(i)}^{x_i}\left(a_{\pi(1)}^{x_1}a_{\pi(2)}^{x_2} - a_{\pi(1)}^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}a_{\pi(2)}^{\lambda x_2+(1-\lambda)x_1} + a_{\pi(1)}^{x_2}a_{\pi(2)}^{x_1} - a_{\pi(1)}^{\lambda x_2+(1-\lambda)x_1}a_{\pi(2)}^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=3}^{n} a_{\pi(i)}^{x_i}\left(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}\right)^{x_2}\left(a_{\pi(1)}^{x_1-x_2} - a_{\pi(1)}^{\lambda(x_1-x_2)}a_{\pi(2)}^{(1-\lambda)(x_1-x_2)} + a_{\pi(2)}^{x_1-x_2} - a_{\pi(1)}^{(1-\lambda)(x_1-x_2)}a_{\pi(2)}^{\lambda(x_1-x_2)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=3}^{n} a_{\pi(i)}^{x_i}\left(a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}\right)^{x_2}\left(a_{\pi(1)}^{\lambda(x_1-x_2)} - a_{\pi(2)}^{\lambda(x_1-x_2)}\right)\left(a_{\pi(1)}^{(1-\lambda)(x_1-x_2)} - a_{\pi(2)}^{(1-\lambda)(x_1-x_2)}\right)\\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

Nehmen wir nun an, dass (3.9) für alle $a \in \mathbb{R}_+^n$ gilt. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\sum x \geq \sum y & \qquad \text{, wenn } a_1 = \cdots = a_n > 1\\
\sum x \leq \sum y & \qquad \text{, wenn } a_1 = \cdots = a_n < 1
\end{aligned}
$$

Daraus folgt (3.3). Nun setzen wir $a_1 = \cdots = a_k = r$ und $a_{k+1} = \cdots = a_n = 1$. So entstehen zwei Summen von Potenzen r^α, wobei α jeweils eine Summe, von k verschiedenen x_i bzw. y_i. Bei großem r sehen wir (3.2), weil das jeweils die größten α auf jeder Seite sind. Also majodiert x y. □

3.5 Zwei weitere Unlgeichungen

Auf eine weitere Ungleichung bin ich gekommen als ich bei der Ungleichung 4 $(a_1^r, \dots, a_n^r)$ und $(a_1^s, \dots, a_n^s)$ eingesetzt habe.[8] Diese Ungleichung habe ich in einer weiteren Verallgemeinerung in [1] gefunden.

Ungleichung 25. *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $q \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^n$[9]. $x \succ y$ genau dann, wenn*

$$
\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_j a_j^{x_i} \geq \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_j a_j^{y_i} \tag{3.10}
$$

für alle $a \in \mathbb{R}_+^m$.

Beweis. Es gelte $x \succ y$. Nach Satz 21 und Ungleichung 13 gilt nun

$$
\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_j a_j^{y_i} = \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_j a_j^{\sum_{k=1}^{n} p_{ik}x_k}
$$

[8] $(r+s, 0) \succ (r, s)$

[9] $\sum q = 1$ muss nicht unbedingt gelten. Wir weichen hier davon ab, weil (p_{ij}) als doppel-stochastische Matrix eingeführt wurde.

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(q_j^{\left(\sum_{k=1}^{n}p_{ik}\right)^{-1}}a_j^{x_1})^{p_{i1}}\dots(q_j^{\left(\sum_{k=1}^{n}p_{ik}\right)^{-1}}a_j^{x_n})^{p_{in}} \\
&\leq \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}q_ja_j^{x_1}\right)^{p_{i1}}\dots\left(\sum_{j=1}^{m}q_ja_j^{x_n}\right)^{p_{in}} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}q_ja_j^{x_i}
\end{aligned}
$$

Es gelte (3.10). Insbesondere für $a_1 = \dots = a_n = a$. So gilt

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}q_ja_j^{x_i} &\geq \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}q_ja_j^{y_i} \\
\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}q_j\right)a^{x_i} &\geq \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}q_j\right)a^{y_i} \\
a^{\sum_{i=1}^{n}x_i} &\geq a^{\sum_{i=1}^{n}y_i}
\end{aligned}
$$

Es folgt also (3.3). Nun setzen wir $a_1 = \dots = a_k = r$ und $a_{k+1} = \dots = a_n = 1$.

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}q_ja_j^{x_i} &\geq \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}q_ja_j^{y_i} \\
P(r) = \prod_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{k}q_j\right)r^{x_i} + \sum_{j=k+1}^{m}q_j\right) &\geq \prod_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{k}q_j\right)r^{y_i} + \sum_{j=k+1}^{m}q_j\right) = Q(r)
\end{aligned}
$$

Unter der Vorrausetzung (3.1) sind nun P und Q Summen von Potenzen, wobei $\sum_{j=1}^{k}x_j$ und $\sum_{j=1}^{k}y_j$ jeweils die größten Exponenten sein müssen. Für große r folgt sofort (3.2). □

Ungleichung 26. *Seien $x, y, u \in \mathbb{R}^n$ absteigend geordnet. $x \succ y$ genau dann, wenn*

$$\sum_i x_iu_i \geq \sum_i y_iu_i \tag{3.11}$$

Beweis. Sei zunächst $x \succ y$. Wegen Satz 20 können wir annehmen, dass x und y bis auf $x_j \geq x_k$ und $y_j \geq y_k$ gleich sind, wobei $y_j = \lambda x_j + (1-\lambda)x_k$ und $y_k = \lambda x_k + (1-\lambda)x_j$ für $\lambda \in [0;1]$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
(1-\lambda)(x_j - x_k)(u_j - u_k) &\geq 0 \\
(1-\lambda)x_ju_j + (1-\lambda)x_ku_k &\geq (1-\lambda)x_ku_j + (1-\lambda)x_ju_k \\
x_ju_j + x_ku_k &\geq \lambda x_ju_j + (1-\lambda)x_ku_j + \lambda x_ku_k + (1-\lambda)x_ju_k = y_ju_j + y_ku_k \\
\sum_i x_iu_i &\geq \sum_i y_iu_i
\end{aligned}
$$

Es gelte nun (3.11). Insbesondere für $u = e$ und $u = -e$, für welche (3.3) folgt. Setzen wir nun $u = (\underbrace{1,\dots,1}_{k},\underbrace{0,\dots,0}_{n-k})$, folgt (3.2). □

Literaturverzeichnis

[1] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya: „Inequalities (Second Edition)“; Cambridge University Press; Cambridge; 1952

[2] A.W. Marshall, I. Olkin: „Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications“; Academic Press, Inc.; San Diego; 1979

[3] Jiři Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša: „Equations and Inequalities“; Springer-Verlag; New York; 2000

[4] T. Andreescu, Bogdan Enescu: „Mathematical Olympiad Treasures“; Birkhäuser; Boston; 2004

[5] K. Königsberger: „Analysis 1“; Springer-Verlag; Berlin, Heildelberg, New York; 1999