Das Schubfachprinzip

Tobias Strauß

21.07.2010

1 Das Dirichletsche Schubfachprinzip

Das Schubfachprinzip ist eines der einfachsten Prinzipien der Mathematik. Es wurde erstmals von Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet formuliert. Manchmal wird dieses Verfahren auch „Taubenschlag“- (engl. pidgeonhole principle) oder „Dirichlet-Prinzip“ genannt. Es ist sofort einzusehen und nahezu offensichtlich, so dass man sich nach der Existenzberechtigung fragen könnte. Wir werden im Folgenden einige nicht triviale Sätze mit Hilfe dieser Methode beweisen und zeigen, dass sie mit der richtigen Idee sehr nützlich sein kann.

Zuerst betrachten wir einige einfache Beispiele:

1. Unter 13 Personen gibt es mindestens 2, die im selben Monat Geburtstag haben.
2. Typischerweise liegt die Anzahl der Haare eines Menschen zwischen 100.000 und 200.000. Sie ist aber sicher kleiner als 1.000.000. Unter den 1,3Millionen Einwohnern von München gibt es also mindestens 2 Personen mit der gleichen Anzahl an Haaren auf dem Kopf.
3. Zieht man 3 mal aus einer Sockenkiste mit 4 weißen und 4 schwarzen (einzelnen) Socken, so hat man ein Paar gleichfarbige Socken. Nach 6-maligem ziehen hat man hingegen garantiert ein Paar schwarze Socken.

Diese Erkenntnisse wollen wir nun zu einem allgemeinen Prinzip zusammenfassen.

Schubfachprinzip: Seien m Objekte in n Kategorien („Schubfächer“) eingeteilt. Wenn $m > n$ ist, so gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält.

Diese Methode ist wirklich sofort klar. Möchten wir es dennoch beweisen, so können wir indirekt vorgehen. Falls es in keiner Kategorie mehr als ein Objekt gibt, so ist die Anzahl der Objekte kleiner als $1 \cdot n = n$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $m > n$ ist.

Das Prinzip ist als nicht schwierig zu verstehen. Oftmals ist es aber schwierig zu bestimmen, was Objekte und was Schubfächer sind. Wir wollen dies an einigen einfachen Aufgaben trainieren.

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Gerade und ein Dreieck ABC. Die Gerade geht durch keinen Punkt des Dreiecks. Zeige, dass die Gerade nicht alle Seiten des Dreicks schneidet.

Lösung: Die Gerade zerteilt die Ebene in zwei Halbebenen. Die Objekte sind offenbar die Punkte und die Schubfächer sind die Halbebenen. Dann ist klar, dass in einer Halbebene zwei Punkte liegen müssen. Diese beiden Punkte bestimmen dann ein Seite des Dreiecks, welche nicht von der Graden geschnitten wird. $\square$

Aufgabe 2. Wir schießen mit einem Luftgewehr auf ein dreieckförmiges Ziel dessen Seiten die Länge 2 besitzen. Dabei treffen wir 5 mal. Zeige, dass es zwei Treffer gibt, deren Abstand ≤ 1 ist.

Lösung: Zerteile das Dreieck in vier kleine Dreicke mit Seitenlänge 1. Dann liegen in einem dieser kleineren Dreiecke (Schubfächer) mindestens 2 Treffer. Es ist leicht einzusehen, dass der Abstand dieser Punkte kleiner gleich dem maximalen Abstand der Eckpunkte ist.

Nehmen wir an, x sei ein Punkt innerhalb (oder auf dem Rand) des Dreiecks. Dann sind einer der Eckpunkte am weitesten von x entfernt. Zieht man einen Kreis mit Radius 1 um diesen Eckpunkt, so ist das gesamte Dreieck (und damit auch x) in diesem Kreis enthalten. Also haben alle Punkte des Dreiecks von x den Abstand 1. □

Aufgabe 3. Zeige: In jeder Gruppe von mindestens zwei Personen gibt es zwei, die die gleiche Anzahl von Bekannten innerhalb dieser Gruppe haben. (Dabei sein „bekannt sein“ symmetrisch.)

Lösung: Die Objekte sind offenbar die Personen der Gruppe und die Schubfacher ist die Anzahl der Bekannten einer Person. Außerdem sagen wir noch, dass eine Person nicht sich selbst als Bekannten hat. Daher gibt es die möglichen Schubfächer $0, 1..., n-1$, also insgesamt n Stück. Die Anzahl der Schubfächer und die Anzahl der Personen ist also gleich.

Warum müssen trotzdem in einem Schubfach zwei Objekte liegen?

Es kann nicht sein, dass Person x niemanden kennt, und Person y kennt alle $n-1$ anderen. Somit kennt y auch x. Da „bekannt sein“ symmetrisch ist, folgt der Widerspruch.

Es können also nur $n-1$ Schubfächer gleichzeitig belegt sein. Daher müssen in einem Schubfach zwei Objekte liegen. □

Aufgabe 4. Wir betrachten die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ und nehmen eine beliebige $n+1$ elementige Teilmenge davon. In dieser Teilmenge gibt es dann immer zwei Zahlen, welche keinen gemeinsamen Teiler haben.

Lösung: Offensichtlich, da zwei Zahlen, die sich um eins unterscheiden, relativ prim zu einander sind. □

Offenbar ist die Aussage auch dann noch richtig, wenn wir die Zahlen aus der Menge $\{m+1, m+2, \ldots, m+2n\}$ wählen. Außerdem lässt sie sich auch in die andere Richtung beweisen.

Aufgabe 5. In einer $n+1$ elementigen Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ gibt es zwei Zahlen, so dass die erste Zahl die zweite teilt.

Lösung: Zerlege die Zahlen in ihre geraden und ungeraden Anteile:

$$a_i = 2^{k_i} m_i,$$

wobei m_i eine ungerade Zahl zwischen 1 und $2n-1$ ist. Da es $n+1$ Zahlen aber nur n verschiedene ungerade Anteile gibt, muss eine Zahl ein Vielfaches einer anderen sein. □

Aufgabe 6. (IMO 1972) Aus einer Menge S von 10 höchstens zweistelligen Zahlen lassen immer zwei disjunkte Teilmengen S_1 und S_2 auswählen, deren Summe gleich ist.

Lösung: Die Objekte sind hier die Teilmengen und die Schubfächer sind die Summen. Zählen wir zuerst zählen wir die Objekte: Für jedes Element gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder es ist in der Teilmenge oder nicht. Damit haben $2^{10} = 1024$ Möglichkeiten Teilmengen auszuwählen.

Die Anzahl der Schubfächer schätzen wir grob nach oben ab. Da alle Elemente kleiner gleich 99 sind, ist die Summe einer höchstens 10 elementigen Teilmenge auch kleiner $10 \cdot 99 = 990$. Wir haben also höchstens 990 Schubfächer. Damit muss es zwei (von einander verschiedene) Teilmengen S_1, S_2 geben, die die gleiche Summe besitzen. Diese müssen natürlich nicht disjunkt sein. Entfernen wir aber alle gemeinsamen Elemente, so bleibt die Summe gleich und die resultierenden Teilmengen sind disjunkt. □

2 Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Zuerst ein Beispiel:

Tut man $qs + 1$ Perlen in s Schachteln, so gibt es sicher eine Schachtel mit mehr als q Perlen.

Verallgemeinertes Schubfachprinzip: Seien m Objekte in n Kategorien („Schubfächer") eingeteilt. Dann gibt eine Kategorie in der mindestens

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$$

Objekte liegen.

Aufgabe 7. In einer Folge $a_1, a_2, \dots, a_{nm+1}$ von $nm + 1$ verschiedenen reellen Zahlen gibt es immer eine streng monoton steigende Folge der Länge $m + 1$, so dass

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{m+1}} \qquad (i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1})$$

oder eine streng monoton fallende Folge der Länge $n + 1$, so dass

$$a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_{n+1}} \qquad (i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}).$$

Lösung: Sei f die Funktion, welche jedem a_i die Zahl t_i zuordnet, welche der Länge der längsten monoton wachsenden Teilfolge beginnend mit a_i entspricht. Falls ein i existiert, so dass $t_i \geq m + 1$ ist, so haben wir eine streng monoton steigende Folge der Länge $m + 1$ erhalten.

Nehmen wir also an, dass für alle i $t_i \leq m$ gilt. Dann bildet f von $\{a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}\}$ auf $\{1, 2, \dots, m\}$ ab. Daher finden wir nach dem Schubfachprinzip ein Element $s \in \{1, 2, \dots, m\}$, so dass $f(a_i) = s$ für $\left\lceil \frac{mn+1}{m} \right\rceil = n + 1$ verschiedene $i \in [m]$. Diese Folge von Zahlen nennen wir $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}$. Nehmen wir an, dass $a_{j_i} < a_{j_{i+1}}$ ist. Da die längste monoton wachsende Folge beginnend bei $a_{j_{i+1}}$ hat die Länge s. Wenn wir a_{j_i} davorsetzen, bekommen wir eine Folge der Länge $s + 1$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $f(a_{j_i}) = s$.

Also gilt

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}.$$

Damit haben wir eine monoton fallende Folge der Länge $n + 1$ gefunden. □

Aufgabe 8. Es stehen 23 Springer auf einem Schachbrett. Zeige, dass stets 12 so ausgewählt werden können, so dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

Lösung: Hier muss man wissen, dass ein Springer immer nur von weiß nach schwarz ziehen kann und umgekehrt. Mit anderen Worten, es erfolgt in jedem Zug ein Farbwechsel. Mit diesem Tipp ist es nun einfach die Aufgabe zu lösen. Die Objekte sind die Springer, und die Farben schwarz und weiß sind die Schubfächer. Es gibt also ein Schubfach, in dem

$$\left\lceil \frac{23}{2} \right\rceil = 12$$

Objekte liegen. □

3 Das unendliche Schubfachprinzip

Unendliches Schubfachprinzip: Wenn man eine unendliche Menge in endlich viele Kategorien einteilt, gibt es mindestens eine Kategorie, die unendlich viele Elemente enthält.

Aufgabe 9. Sei $n \geq 2$ irgendeine natürliche Zahl. Wir betrachten die Restklassen $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ bezüglich n. Das heißt: K_0 sind alle Vielfachen von n. K_1 sind alle die Zahlen, deren Differenz mit 1 durch n teilbar ist. Analog definiert mal die restlichen K_i $(i = 1, ..., n-1)$. Dann muss es eine Restklasse geben, in der unendlich viele Primzahlen liegen.

Lösung: Schubfächer: Restklassen, Objekte: Primzahlen. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, sind wir fertig. □

Literatur

Aigner, M. and Ziegler, G. M. (2003). *Das Buch der Beweise.* Springer, Berlin.

Beutelspacher, A. and Zschiegner, M.-A. (2002). *Diskrete Mathematik für Einsteiger.* Vieweg Verlag.

Engel, A. (1999). *Problem-Solving Strategies.* Springer, Berlin.