Das Pascalsche Dreieck

Falko Baustian
Klassenstufe 9 und 10
09.09.2018

Das Pascalsche Dreieck:

Die ersten vier Zeilen des Pascalschen Dreiecks sind:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Aufgabe: Setzt die nächsten 3 Zeilen logisch fort.

Lösung:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

Jeder Eintrag des Pascalschen Dreiecks ergibt sich als Summe der beiden darüber gelegenen Einträge. Das Dreieck ist symmetrisch.

Kurzer historischer Abriss:

Blaise Pascal war ein französischer Mathematiker, der im 17. Jahrhundert lebte. Er beschäftigte sich u.a. auch mit Physik und christlicher Philosophie. Neben dem Pascalschen Dreieck sind beispielsweise auch die physikalische Einheit des Drucks und eine Programmiersprache nach ihm benannt. In seinem Buch *Traité du triangle arithétique* (Abhandlung über das arithmetische Dreieck) sammelte er Ergebnisse zu dem Dreieck, das dann später nach ihm benannt wurde, und verwendete es für wahrscheinlichkeitstheoretische Problemstellungen. Erste Darstellungen eines ähnlichen Dreiecks gab es bereits im 10. Jahrhundert in Indien und Persien. Das zum Pascalschen Dreieck identische aritmetische Dreieck findet sich auch in einem chinesischen Buch aus dem 13. Jahrhundert.

Binomischer Lehrsatz - Teil 1:

Aufgabe: Berechnet $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ und $(a+b)^4$.

Lösung: Es gilt $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (binomische Formel), $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ und $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Die Formel für $(a+b)^n$ lässt sich direkt aus dem Pascalschen Dreieck ablesen. Um die Formel (binomischer Lehrsatz oder verallgemeinerte binomische Formel) explizit aufschreiben zu können führen wir die sogenannten Binomialkoeffizienten ein.

Binomialkoeffizienten - Teil 1:

Die Einträge des Pascalschen Dreiecks entsprechen den sogenannten Binomialkoeffizienten aus der Kombinatorik. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (gesprochen: n über k) gibt an wie viele k-elementige Teilmengen eine Menge mit n unterschiedlichen Elementen hat. Wir können uns z.B. eine Urne mit n unterschiedlichen Kugel vorstellen aus der wir k Kugeln ziehen. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt dann an wie viele Möglichkeiten es gibt, wenn uns die Reihenfolge der gezogenen Kugeln egal ist. Es interessiert und also nur welche Kugeln wir gezogen haben und nicht welche Kugel wir zuerst (an zweiter Stelle u.s.w.) gezogen haben. Ein Beispiel hierfür wäre die Lottoziehung mit 6 aus 49. Hier gibt es $\binom{49}{6} = 13983816$ Möglichkeiten.

Aufgabe: Überlegt euch die Werte von $\binom{3}{2}$, $\binom{4}{2}$ und $\binom{5}{3}$.

Lösung: Es gilt $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{4}{2} = 6$ und $\binom{5}{3} = 10$.

Für das Pascalsche Dreieck gilt:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccccc} &&&&\binom{0}{0}&&&& \\ &&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&& \\ &&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&& \\ &\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}& \\ \binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4} \end{array}$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ entspricht also dem $(k+1)$-ten Eintrag in der n-ten Zeile (beginnend mit der 0-ten Zeile). Die Bildungsvorschrift des Pascalschen Dreiecks lässt sich dann als

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

schreiben. Diese Formel sowie weitere Eigenschaften der Binomialkoeffizienten (und damit des Pascalschen Dreiecks) werden wir später mit der Formel des Binomialkoeffizientens nachrechnen.

Binomischer Lehrsatz - Teil 2:

Der binomische Lehrsatz (unter Verwendung der Binomialkoeffizienten) lautet

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Das Summenzeichen $\sum$ ist eine Kurzschreibweise und bedeutet, dass wir für alle natürlichen Zahlen k von 0 bis n die entsprechenden Ausdrücke aufsummieren. Der Satz kann mit vollständiger Induktion über n bewiesen oder kombinatorisch hergeleitet werden.

Beweisskizze: Der Induktionsanfang ist einfach:

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{0}{0}a^0b^0 = 1.$$

Der Induktionsschritt funktioniert wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n \\
&+ \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]a^n b + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k
\end{aligned}
$$

Eine direkte Folgerung aus dem binomischen Lehrsatz ist, dass die Zeilensummen des Pascalschen Dreiecks die Zweierpotenzen sind.

Aufgabe: Zeigt, dass die Zeilensummen im Pascalschen Dreieck genau den Zweierpotenzen entsprechen.

Lösung: Der binomische Lehrsatz liefert $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n$.

Dreieckszahlen:

Aufgabe: Wenn wir ein Dreieck mit Kugeln wie folgt

```
      o
    o   o
  o   o   o
o   o   o   o
```

legen, wie viele Kugeln benötigen wir dann für ein Dreieck mit der Seitenlänge von 100 Kugeln?

Lösung: Wir benötigen 5050 Kugeln. Dies entspricht der Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen. Man kann zum Beispiel die Methode von Gauß verwenden:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & + & 2 & + & \ldots & + & 100 & & \\
+ & & + & & & & + & & \\
100 & + & 99 & + & \ldots & + & 1 & & \\
= & & = & & & & = & & \\
101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 & = & 100 \cdot 101
\end{array}
$$

Die ersten Diagonale des Pascalschen Dreiecks besteht nur aus Einsen. Die zweite Diagonale besteht aus den natürlichen Zahlen. Dies folgt aus der Definition des Dreiecks aber auch aus den Binomialkoeffizienten. Die dritte Diagonale entspricht den sogenannten Dreieckszahlen, die wir aus der vorigen Aufgabe kennen. Es gilt

$$\Delta(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{n-1}.$$

Die vorletzte Gleichheit erhalten wir später sehen, wenn wir die Formel für die Binomialkoeffizienten kennenlernen. Die letzte Gleichheit entspricht lediglich der Symmetrie des Pascalschen Dreiecks.

Aufgabe: Bestimmt analog die Tetraederzahlen für die Seitenlängen $n = 2, 3, 4$.

Lösung: Die Tetraederzahlen sind $T(2) = 4$, $T(3) = 10$ und $T(4) = 20$.

Die vierte Diagonale entspricht den Tetraederzahlen

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n} \Delta(k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3} = \binom{n+2}{n-1},$$

die wir für einen Tetraeder anstelle des Dreiecks erhalten würden. Für höhere Dimensionen gibt es dann noch die regulären figurierten Zahlen der Ordnung r

$$R(r,n) = \sum_{k=1}^{n} R(r-1,k) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}.$$

Jede Diagonale entspricht also dem Pendant der Dreieckszahlen in einer bestimmten Dimension.

Die Fibonacci-Zahlen:

Aufgabe: Gegeben sei ein Paar Kaninchen. Es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten

1. Jedes Paar Kaninchen wirft pro Monat ein weiteres Paar Kaninchen.
2. Ein neugeborenes Paar bekommt erst im zweiten Lebensmonat Nachwuchs.
3. Kein Tier verlässt die Population oder kommt dazu.

Wie entwickelt sich die Population in den ersten Monaten?

Lösung: Wenn wir mit einem trächtigen Paar anfangen, erhalten wir die Zahlenfolge 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ansonsten die Zahlenfolge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Die Folge bezeichnet man als Fibonacci-Zahlen.

Die Fibonacci-Zahlen tauchen in der Natur häufiger auf, das heißt auch in realistischeren Anwendungen. Die Folge wächst sehr schnell. Es lässt sich auch eine explizite Formel bestimmen. Mit $F(0) = 1$ und $F(1)=1$ gilt

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Mit Hilfe des Bionomischen Lehrsatzes könnte man die Formel für beliebige n überprüfen. Die Fibonacci-Zahlen können ebenfalls aus dem Pacalschen Dreieck abgelesen werden.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & 2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & 3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & 5 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & 8 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & 13
\end{array}$$

Catalanzahlen:

Ein konvexes Viereck lässt sich durch Diagonalen auf zwei Arten in Dreiecke unterteilen. Für ein konvexes Fünfeck gibt es fünf Möglichkeiten. Die Anzahl an Triangulierungen nennt man Catalanzahlen. Diese spielen eine wichtige Aufgaben in der Kombinatorik.

Aufgabe: Wie viele Triangulierungen gibt es für ein konvexes Sechseck?

Lösung: Es gibt 14 Triangulierungen des konvexen Sechsecks.

Die explizite Formel für die Catalanzahlen bzw. die Triangulierungen im konvexen (n+2)-Eck ist

$$C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

Der zweite Teil der Formel garantiert, dass das Ergebnis ganzzahlig sind. Zusätzlich können wir damit die Catalanzahlen als Differenzen aus dem Pascalschen Dreieck abgelesen.

$$\begin{array}{ccccccccccccc|ll}
 & & & & & & 1 & & & & & & & \mathrm{C}(0) = 1 & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & {\color{red}2} & & {\color{red}1} & & & & & \mathrm{C}(1) = 1 & = 2 - 1 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & {\color{red}6} & & {\color{red}4} & & 1 & & & \mathrm{C}(2) = 2 & = 6 - 4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
1 & & 6 & & 15 & & {\color{red}20} & & {\color{red}15} & & 6 & & 1 & \mathrm{C}(3) = 5 & = 20 - 15
\end{array}$$

Eine andere Umformulierung der Formel liefert die Catalanzahlen wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccccccc|ll}
 & & & & & & {\color{red}1} & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & {\color{red}2} & & 1 & & & & & 2 & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & {\color{red}6} & & 4 & & {\color{red}1} & & & 5 & = 6 - 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
1 & & 6 & & 15 & & {\color{red}20} & & 15 & & {\color{red}6} & & 1 & 14 & = 20 - 6
\end{array}$$

Teilbarkeitsmuster:

Wenn wir im Pascalschen Dreieck alle Zahlen markieren, die durch 2, 3 oder eine andere Zahl teilbar sind, dann entstehen dabei interessante Muster. Insbesondere fällt auf, dass sich ausschließlich Dreiecke mit einer waagerechten Grundseite und einer Ecke, die nach unten Zeigt, bilden.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & {\color{red}3} & & {\color{red}3} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & {\color{red}6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & {\color{red}6} & & {\color{red}15} & & 20 & & {\color{red}15} & & {\color{red}6} & & 1 & \\
1 & & 7 & & {\color{red}21} & & 35 & & 35 & & {\color{red}21} & & 7 & & 1
\end{array}$$

Aufgabe: Warum entstehen diese Dreiecke?

Lösung: Nehmen wir an, dass wir mehrere nebeneinanderliegende Einträge haben, die durch eine natürliche Zahl n teilbar sind. Dann führt die Bildungsvorschrift für das Pascalsche Dreieck dazu, dass genau diese Dreiecke entstehen, denn wenn zwei nebeneinanderliegende Einträge durch n teilbar sind, dann ist auch ihre Summe durch n teilbar. Wenn der Eckpunkt durch n teilbar ist und der danebenliegende Punkt nicht, dann ist die Summe auch nicht durch n teilbar.

Binomialkoeffizienten - Teil 2:

Wir wollen jetzt schrittweise die explizite Formel der Binomialkoeffizienten herleiten.

Aufgabe: Wie viele Kombinationen gibt es n unterschiedliche Elemente anzuordnen? Dies entspricht dem Ziehen aller Kugeln aus einer Urne mit n unterschiedlichen Kugeln, wobei auf die Reihenfolge geachtet wird.

Lösung: Es gibt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Kombinationen.

Wir führen als Kurzschreibweise die Fakultät natürlicher Zahlen ein

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

und definieren $0! = 1$. Es gilt $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Aufgabe: Wie viele Kombinationen gibt es, wenn wir nur k der n Kugeln ziehen und dabei auf die Reihenfolge achten?

Lösung: Es gibt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ Kombinationen.

Nun haben wir alles zusammen, was wir für die Formel des Binomialkoeffizienten benötigen.

Aufgabe: Wie lautet die Formel für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (k-maliges Ziehen aus n Elementen bei Vernachlässigung der Reihenfolge)?

Lösung: Die Formel für den Binomialkoeffizienten ergibt sich als Quotient der vorigen beiden Lösungen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} \Big/ k! = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Viele der Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks und die darin enthaltenen Werte lassen sich mit dieser Formel nachrechen, z.B. die die Dreieckszahlen

$$\Delta(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \binom{n}{2}.$$

Aufgabe: Wie lautet die Symmetrieeigenschaft für das Pascalsche Dreieck, wenn wir sie in Binomialkoeffizienten ausdrücken? Zeigt die Symmetrieeigenschaft und Additionseigenschaft

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

des Pascalschen Dreiecks mit Hilfe der Binomialkoeffizienten.

Lösung: Die Symmetrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ folgt direkt aus der Definition, für die Addition gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \\
&= \frac{k+1}{n-k} \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \\
&= \frac{n+1}{n-k} \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe: Beweist die Formel

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1},$$

die wir zum Ablesen der Catalanzahlen verwendet haben.

Lösung: Es gilt

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

Aufgabe: Wir erinnern uns, dass die Catalanzahl $C(n)$ die Anzahl an Triangulierungen des Konvexen (n+2)-Ecks beschreibt. Wie lautet die zweite Darstellung der Catalanzahlen (für $n \geq 3$), die wir verwendet haben um die Werte aus dem Pascalschen Dreieck abzulesen, wenn wir sie Binomialkoeffizienten ausgedrücken? Beweist die Formel.

Lösung: Die Formel lautet

$$C(n) = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n+1}.$$

Wir folgern

$$\begin{aligned}
\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n+1} &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{(n-3)!(n+1)!} \\
&= \left(\frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n+1)n}\right)\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-3)!} \\
&= \frac{4n-2}{(n+1)n(n-1)(n-2)}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-3)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{2(2n-1)(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \frac{1}{n+1}\frac{2n(2n-1)!}{n(n-1)!n!} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C(n).
\end{aligned}$$

Harmonisches Dreieck:

Das harmonische Dreieck geht aus dem Pascalschen Dreieck hervor, indem man von jedem Wert den Kehrwert bildet und dann durch die um eins erhöhte Zeilennummer dividiert.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & \frac{1}{2} & & 1 & \\ 1 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} \end{array}$$

Im harmonischen Dreieck ist jeder Eintrag die Summe der beiden darunter liegenden Zahlen.

Aufgabe: Beweist diesen Zusammenhang.

Lösung: Analog zum Pascalschen Dreieck bezeichen wir die Einträge des harmonischen Dreiecks mit $H(n, k)$, wobei $H(n, k)$ den (k+1)-ten Eintrag in der n-ten Zeile beschreibt (beginnend mit der 0-ten Zeile). Es gilt nach Bildungsvorschrift

$$H(n, k) = \frac{1}{n+1}\left[\binom{n}{k}\right]^{-1}$$

und wir wollen zeigen, dass

$$H(n, k) = H(n+1, k) + H(n+1, k+1)$$

gilt. Wir folgern

$$
\begin{aligned}
H(n+1,k)+H(n+1,k+1) &= \frac{1}{n+2}\left[\binom{n+1}{k}\right]^{-1}+\frac{1}{n+2}\left[\binom{n+1}{k+1}\right]^{-1}\\
&= \frac{1}{n+2}\frac{(n-k+1)!k!}{(n+1)!}+\frac{1}{n+2}\frac{(n-k)!(k+1)!}{(n+1)!}\\
&= ((n-k+1)+(k+1))\frac{(n-k)!k!}{(n+2)(n+1)!}=\frac{(n-k)!k!}{(n+1)!}\\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(n-k)!k!}{n!}=\frac{1}{n+1}\left[\binom{n}{k}\right]^{-1}=H(n,k).
\end{aligned}
$$