Kombinatorik

Elementare Abzählregeln

Summenregel. Seien $S_1, \ldots, S_n$ endliche Mengen mit $S_i \cap S_j = \varnothing$ für $i \neq j$, und sei $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$. Dann ist

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_n|.$$

Falls die Disjunktheitsvoraussetzung nicht erfüllt ist, gilt für $n = 2$,

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

Produktregel. Seien $S_1, \ldots, S_n$ endliche Mengen mit $S_i \cap S_j = \varnothing$ für $i \neq j$, und sei $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Dann ist

$$|S| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n|.$$

Gleichheitsregel. Wenn $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung zwischen den endlichen Mengen A und B ist, so gilt $|A| = |B|$.

Einfache Anwendungen

Binomialkoeffizienten. Die Anzahl der $k-$Teilmengen einer $n-$Menge ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Rekursion für die Binomialkoeffizienten. Es gilt $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Binomialsatz. Es gilt

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} x^0 y^n.$$

Summe der Binomialkoeffizienten. Die Anzahl der Teilmengen einer $n-$Menge ist gleich der Anzahl der 0-1-Wörter der Länge n, und diese ist gleich 2^n. Es folgt

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Alternierende Summe der Binomialkoeffizienten. Mit $x = -1$ und $y = 1$ folgt aus dem Binomialsatz

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \mp \cdots \pm \binom{n}{n} = 0.$$

Multimengen. Die Anzahl der $k-$Teilmultimengen einer $n-$Menge ist $\binom{n+k-1}{k}$.

Literatur

[1] M. Aigner, *Diskrete Mathematik*, Vieweg, 2004.