Eine Einführung in die Kategorientheorie

RHO-Sommercamp, Waren

Martin Haufschild

17. August 2009

Inhalt

- Wozu Kategorientheorie?
- Motivation: Direktes Produkt in Gruppen und top. Räumen
- Kategorien
- Funktoren
- Natürliche Transformationen
- Diagramme
- Limes und Colimes von Diagrammen
- allgemeines Konzept des kategoriellen Produkts (mittels kategoriellem Limes)

Entstehung von mathematischen Teilgebieten

- durch ein Wechselspiel von konkreten interessanten Problemen und allgemeinen Theorien
- Oft sind die Beziehungen zwischen den Teilgebieten erst durch allgemeinere Theorien erkennbar.

Ursprünge der Kategorientheorie

- Zuerst: **Einheitliche Sprache** für Homologie und Cohomologie schaffen (Eilenberg, Mac Lane).
- Danach: Kategorien und Funktoren als Teile einer eigenständigen Theorie.
- Funktion der Kategorientheorie: Untersuchung der **Struktur** mathematischer Theorien und ihrer **Beziehungen** untereinander.
- In vielen Fällen ist es möglich die algebraische und topologische Komponente einer Theorie zu bestimmen.

Ursprünge der Kategorientheorie

- Zuerst: **Einheitliche Sprache** für Homologie und Cohomologie schaffen (Eilenberg, Mac Lane).
- Danach: Kategorien und Funktoren als Teile einer eigenständigen Theorie.
- Funktion der Kategorientheorie: Untersuchung der **Struktur** mathematischer Theorien und ihrer **Beziehungen** untereinander.
- In vielen Fällen ist es möglich die algebraische und topologische Komponente einer Theorie zu bestimmen.

Ursprünge der Kategorientheorie

- Zuerst: **Einheitliche Sprache** für Homologie und Cohomologie schaffen (Eilenberg, Mac Lane).
- Danach: Kategorien und Funktoren als Teile einer eigenständigen Theorie.
- Funktion der Kategorientheorie: Untersuchung der **Struktur** mathematischer Theorien und ihrer **Beziehungen** untereinander.
- In vielen Fällen ist es möglich die algebraische und topologische Komponente einer Theorie zu bestimmen.

Ursprünge der Kategorientheorie

- Zuerst: **Einheitliche Sprache** für Homologie und Cohomologie schaffen (Eilenberg, Mac Lane).
- Danach: Kategorien und Funktoren als Teile einer eigenständigen Theorie.
- Funktion der Kategorientheorie: Untersuchung der **Struktur** mathematischer Theorien und ihrer **Beziehungen** untereinander.
- In vielen Fällen ist es möglich die algebraische und topologische Komponente einer Theorie zu bestimmen.

Motivation: Verallgemeinerung von speziellen Strukturen

In verschiedenen Teilgebieten der Mathematik werden oft

- mathematische Begriffe auf analoge Weise eingeführt
- Beweise in ähnlicher Weise durchgeführt

Betrachten wir als Beispiel das direkte Produkt - zuerst für Gruppen und dann für topologische Räume.

Direktes Produkt von Gruppen

Definition: Direktes Produkt von Gruppen

Unter einem direkten Produkt der Gruppen $G_i, i \in I$ versteht man eine Gruppe G mit Gruppenhomomorphismen $\pi_i : G \to G_i, i \in I$, und folgender Eigenschaft:

(DP) Sind Gruppenhomomorphismen $f_i : H \to G_i, i \in I$ gegeben, so existiert **genau ein** Gruppenhomomorphismus $f : H \to G$, so dass für jedes $i \in I$ gilt: $\pi_i \circ f = f_i$, also folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi_i"] & G_i \\ H \arrow[u, dashed, "\exists! f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Es gibt bis auf Isomorphie nur ein direktes Produkt. Man spricht daher meist von dem direkten Produkt der G_i und bezeichnet es mit $\prod_{i \in I} G_i := G$.

Die Homomorphismen $\pi_i, i \in I$, nennt man die Projektionen.

Direktes Produkt von topologischen Räumen

Analog ist das direkte Produkt von topologischen Räumen $X_i, i \in I$ definiert:

Definition: Direktes Produkt von topologischen Räumen

Unter einem direkten Produkt der $X_i, i \in I$ versteht man einen topologischen Raum X mit stetigen Abbildungen $\pi_i : X \to X_i, i \in I$, und folgender Eigenschaft:

(DP) Sind stetige Abbildungen $f_i : Y \to X_i, i \in I$ gegeben, so existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \to X$, so dass für jedes $i \in I$ gilt: $\pi_i \circ f = f_i$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_i"] & X_i \\ Y \arrow[u, dashed, "\exists! f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Direktes Produkt für weitere Strukturen

Auf genau die gleiche Art kann man das direkte Produkt von Halbgruppen, Ringen, Vektorräumen oder Mengen definieren.

Die spezielle mathematische Struktur der Objekte spielt für den Beweis, dass ein so definiertes direktes Produkt bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, **keine Rolle**.

Ein Ziel der Kategorientheorie ist es, solche Begriffe allgemein so einzuführen, dass sie in den verschiedenen Theorien jeweils genau das Richtige beschreiben und man Beweise im allgemeinen Rahmen führen kann.

Ausgehend von einer mathematischen Theorie stellt sich für die Kategorientheorie folgende Frage:

1. Stellt dieser Satz in einer **anderen** mathematischen Theorie eine **interessante Aussage** dar?
2. Gibt es für diesen Satz auch einen Beweis, bei dem die **mathematische Struktur** der Objekte und Abbildungen **keine Rolle** spielt?

Nutzen der Kategorientheorie

Der Kategorientheorie gelingt es damit

- einfachere Beweise zu finden
- weiter reichende Beweise zu finden
- zu präzisieren, welche Sätze einer mathematischen Theorie spezifisch für diese sind und welche verallgemeinert werden können
- Welche Axiome sind notwendig und was passiert, wenn man diese abschwächt?

Nutzen der Kategorientheorie

Der Kategorientheorie gelingt es damit

- einfachere Beweise zu finden
- weiter reichende Beweise zu finden
- zu präzisieren, welche Sätze einer mathematischen Theorie spezifisch für diese sind und welche verallgemeinert werden können
- Welche Axiome sind notwendig und was passiert, wenn man diese abschwächt?

Nutzen der Kategorientheorie

Der Kategorientheorie gelingt es damit

- einfachere Beweise zu finden
- weiter reichende Beweise zu finden
- zu präzisieren, welche Sätze einer mathematischen Theorie spezifisch für diese sind und welche verallgemeinert werden können
- Welche Axiome sind notwendig und was passiert, wenn man diese abschwächt?

Nutzen der Kategorientheorie

Der Kategorientheorie gelingt es damit

- einfachere Beweise zu finden
- weiter reichende Beweise zu finden
- zu präzisieren, welche Sätze einer mathematischen Theorie spezifisch für diese sind und welche verallgemeinert werden können
- Welche Axiome sind notwendig und was passiert, wenn man diese abschwächt?

Eindeutigkeit des direkten Produkts bis auf Isomorphie

Beweis am Beispiel von **Gruppen**:

Seien zwei direkte Produkte $\pi_i : G \to G_i, \quad \pi'_i : G' \to G_i, i \in I$, gegeben. Nach (DP) gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi' : G' \to G$, so dass $\forall i \in I : \pi'_i = \pi_i \circ \varphi'$. Ebenso erhält man ein eindeutig bestimmtes $\varphi : G \to G'$, so dass $\forall i \in I : \pi_i = \pi'_i \circ \varphi$. Dann ist

$$\pi_i = \pi'_i \circ \varphi = \pi_i \circ (\varphi' \circ \varphi), i \in I,$$

und

$$\pi_i = \pi_i \circ id_G = \pi_i \circ (\varphi' \circ \varphi), i \in I.$$

Da nach (DP) aber genau ein Homomorphismus ψ mit $\pi_i \circ \psi = \pi_i, i \in I$, existiert, muss $\varphi' \circ \varphi = id_G$ gelten und analog $\varphi \circ \varphi' = id_G$. Dies bedeutet aber, dass φ und φ' Isomorphismen mit $\varphi' = \varphi^{-1}$ sind.

Eindeutigkeit des direten Produkts bis auf Isomorphie

Dieser Beweis bleibt unverändert gültig, wenn man

- “Gruppe” durch “topologischen Raum” und
- “Gruppenhomomorphismus” durch “stetige Abbildung”

ersetzt.

$\rightarrow$ Gültigkeit für Gruppen und topologische Räume,
aber auch für Halbgruppen, Ringe, Vektorräume und Mengen.

Was benutzt man also an mathematischer Struktur?

Es ist die Existenz von identischen Abbildungen und die Komposition (Verknüpfung) von Abbildungen durch das "$\circ$"-Produkt.
Die jeweiligen Abbildungen **erhalten die Struktur** der jeweiligen Objekte und ebenso tut es das $\circ$-Produkt.

Man benötigt also eine Klasse **K** von Abbildungen, welche bezüglich "$\circ$" folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Gilt $f, g \in \mathbf{K}$ und ist $g \circ f$ definiert, so ist $g \circ f \in \mathbf{K}$.

(ii) Ist $f \in \mathbf{K}$, $f : A \to B$, so gilt $id_A, id_B \in \mathbf{K}$.

$\to$ Die Klasse aller Gruppenhomomorphismen oder die Klasse aller stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen erfüllen diese Bedingungen.

K ist mit der Verknüpfung $\circ$ und den Axiomen (i) und (ii) **ein Beispiel für eine Kategorie.** Man möchte sich bei Kategorien aber nicht auf Abbildungen beschränken.

Kategorien

Definition: Kategorie

Eine Kategorie **K** besteht aus

1. einer Klasse Ob **K** von Objekten;
2. für alle $A, B \in$ Ob **K**: eine Klasse $\mathbf{K}(A, B)$ von Morphismen (Pfeilen) von A nach B. Für $f \in \mathbf{K}(A, B)$, auch $f : A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$, heißt A die Quelle und B das Ziel von f;
3. eine Komposition "$\circ$" von Morphismen:

$$\circ : \mathbf{K}(B, C) \times \mathbf{K}(A, B) \to \mathbf{K}(A, C), \quad g \circ f =: gf$$

mit folgenden Eigenschaften

- Assoziativität: Für $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ gilt

$$(hg)f = h(gf) \quad \text{(und deshalb)} \ =: hgf$$

- Identitäten: Für jedes $A \in$ Ob **K** gibt es einen identischen Morphismus $id_A \in \mathbf{K}(A, A)$ mit $id_A \circ f = f$ und $g \circ id_A = g$, falls f das Ziel A und g die Quelle A hat.

Bemerkung:

- Es genügt hier zu wissen: Jede Menge ist eine (kleine) Klasse, aber nicht umgekehrt ($\rightarrow$ NBG-Mengenlehre).
- Wir benutzen $g \circ f$ als “g nach f”. Aber auch die umgekehrte Schreibweise ist möglich.
- Die Morphismen und ihre Komposition sind **essenziell.** Aber es ist nicht von Interesse **wie** die Morphismen die Objekte von **K** aufeinander abbilden, z.B. wie die Elemente der Gruppen durch die Gruppenhomomorphismen aufeinander abgebildet werden.
- Man kann Kategorien alternativ auch so definieren, dass man auf Objekte verzichtet und identische Morphismen an ihrer Stelle benutzt.

Lemma: Eindeutigkeit der Identitäten

Der identische Morphismus id_A ist durch das Objekt A eindeutig bestimmt.

BEMERKUNG:

- Es genügt hier zu wissen: Jede Menge ist eine (kleine) Klasse, aber nicht umgekehrt ($\rightarrow$ NBG-Mengenlehre).
- Wir benutzen $g \circ f$ als “g nach f”. Aber auch die umgekehrte Schreibweise ist möglich.
- Die Morphismen und ihre Komposition sind **essenziell**. Aber es ist nicht von Interesse **wie** die Morphismen die Objekte von **K** aufeinander abbilden, z.B. wie die Elemente der Gruppen durch die Gruppenhomomorphismen aufeinander abgebildet werden.
- Man kann Kategorien alternativ auch so definieren, dass man auf Objekte verzichtet und identische Morphismen an ihrer Stelle benutzt.

LEMMA: EINDEUTIGKEIT DER IDENTITÄTEN

Der identische Morphismus id_A ist durch das Objekt A eindeutig bestimmt.

BEMERKUNG:

- Es genügt hier zu wissen: Jede Menge ist eine (kleine) Klasse, aber nicht umgekehrt ($\rightarrow$ NBG-Mengenlehre).
- Wir benutzen $g \circ f$ als "g nach f". Aber auch die umgekehrte Schreibweise ist möglich.
- Die Morphismen und ihre Komposition sind **essenziell.** Aber es ist nicht von Interesse **wie** die Morphismen die Objekte von **K** aufeinander abbilden, z.B. wie die Elemente der Gruppen durch die Gruppenhomomorphismen aufeinander abgebildet werden.
- Man kann Kategorien alternativ auch so definieren, dass man auf Objekte verzichtet und identische Morphismen an ihrer Stelle benutzt.

LEMMA: EINDEUTIGKEIT DER IDENTITÄTEN

Der identische Morphismus id_A ist durch das Objekt A eindeutig bestimmt.

BEMERKUNG:

- Es genügt hier zu wissen: Jede Menge ist eine (kleine) Klasse, aber nicht umgekehrt ($\to$ NBG-Mengenlehre).
- Wir benutzen $g \circ f$ als "g nach f". Aber auch die umgekehrte Schreibweise ist möglich.
- Die Morphismen und ihre Komposition sind **essenziell**. Aber es ist nicht von Interesse **wie** die Morphismen die Objekte von **K** aufeinander abbilden, z.B. wie die Elemente der Gruppen durch die Gruppenhomomorphismen aufeinander abgebildet werden.
- Man kann Kategorien alternativ auch so definieren, dass man auf Objekte verzichtet und identische Morphismen an ihrer Stelle benutzt.

LEMMA: EINDEUTIGKEIT DER IDENTITÄTEN

Der identische Morphismus id_A ist durch das Objekt A eindeutig bestimmt.

Beispiele für Kategorien

- **Set**: Katergorie aller Mengen und Abbildungen zwischen ihnen.
- **Vek**: Vektorräume und ihre linearen Abbildungen,
- $\mathbf{Vek}_{\mathbb{K}}$: Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$,
- **Grp**: Gruppen und ihre Homomorphismen.
- **Mon**: Monoide und ihre Monoidhomomorphismen.
- **Top**: Topologische Räume und ihre stetigen Abbildungen.
- **Cat**: (Kleine) Kategorien und die Funktoren zwischen ihnen.
- Die leere Kategorie enthält kein Objekt und also auch keine Morphismen.

Eine Kategorie heißt partielle Ordnungskategorie, wenn für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$ gilt: $\mathbf{K}(A, B) \cup \mathbf{K}(B, A)$ hat höchstens ein Element. Jede partiell geordnete Klasse kann bijektiv einer partiellen Ordnungskategorie zugeordnet werden.

Größenordnungen von Kategorien

DEFINITION:

(1) $\mathbf{K}$ heißt lokal klein, wenn für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$: $\mathbf{K}(A, B)$ ist eine Menge.

(2) $\mathbf{K}$ heißt klein, wenn $\bigcup_{A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}} \mathbf{K}(A, B)$ eine Menge ist.

(3) $\mathbf{K}$ heißt endlich, wenn $\mathbf{K}$ eine endliche Menge ist.

(4) $\mathbf{K}$ heißt diskret, wenn $\mathbf{K}$ nur die identischen Morphismen besitzt.

LEMMA: KATEGORIEN SIND VERALLGEMEINERTE MONOIDE

Eine kleine Kategorie $\mathbf{K}$ ist genau dann ein Monoid, d.h. eine Halbgruppe mit (eindeutigem) neutralem Element, wenn $\mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$ genau ein Element besitzt.

Isomorphismen

DEFINITION: ISOMORPHISMUS

In einer Kategorie **K** heißt der Morphismus $f : A \to B$ ein Isomorphismus, wenn es ein $g : B \to A$ gibt. so dass $gf = id_A$ und $fg = id_B$.

BEMERKUNG:

- g ist durch f eindeutig bestimmt und wird deshalb DAS Inverse von f genannt: $g = f^{-1}$.
- Kompositionen und Inverse von Isomorphismen sind wieder Isomorphismen.
- A und B heißen isomorph ($A \cong B$), wenn es einen Isomorphismus $f : A \to B$ gibt.
  $A \cong B$ ist eine Äquivalenzrelation auf Ob **K**.
- Die Klasse aller Isomorphismen von **K** wird mit **Iso(K)** bezeichnet.

Isomorphismen

DEFINITION: ISOMORPHISMUS

In einer Kategorie **K** heißt der Morphismus $f : A \to B$ ein Isomorphismus, wenn es ein $g : B \to A$ gibt. so dass $gf = id_A$ und $fg = id_B$.

BEMERKUNG:

- g ist durch f eindeutig bestimmt und wird deshalb DAS Inverse von f genannt: $g = f^{-1}$.
- Kompositionen und Inverse von Isomorphismen sind wieder Isomorphismen.
- A und B heißen isomorph ($A \cong B$), wenn es einen Isomorphismus $f : A \to B$ gibt.
  $A \cong B$ ist eine Äquivalenzrelation auf Ob **K**.
- Die Klasse aller Isomorphismen von **K** wird mit **Iso(K)** bezeichnet.

Isomorphismen

DEFINITION: ISOMORPHISMUS

In einer Kategorie **K** heißt der Morphismus $f : A \to B$ ein Isomorphismus, wenn es ein $g : B \to A$ gibt. so dass $gf = id_A$ und $fg = id_B$.

BEMERKUNG:

- g ist durch f eindeutig bestimmt und wird deshalb DAS Inverse von f genannt: $g = f^{-1}$.
- Kompositionen und Inverse von Isomorphismen sind wieder Isomorphismen.
- A und B heißen isomorph ($A \cong B$), wenn es einen Isomorphismus $f : A \to B$ gibt.
  $A \cong B$ ist eine Äquivalenzrelation auf Ob **K**.
- Die Klasse aller Isomorphismen von **K** wird mit **Iso(K)** bezeichnet.

Isomorphismen

DEFINITION: ISOMORPHISMUS

In einer Kategorie **K** heißt der Morphismus $f : A \to B$ ein Isomorphismus, wenn es ein $g : B \to A$ gibt. so dass $gf = id_A$ und $fg = id_B$.

BEMERKUNG:

- g ist durch f eindeutig bestimmt und wird deshalb DAS Inverse von f genannt: $g = f^{-1}$.
- Kompositionen und Inverse von Isomorphismen sind wieder Isomorphismen.
- A und B heißen isomorph ($A \cong B$), wenn es einen Isomorphismus $f : A \to B$ gibt.
  $A \cong B$ ist eine Äquivalenzrelation auf Ob **K**.
- Die Klasse aller Isomorphismen von **K** wird mit **Iso(K)** bezeichnet.

Isomorphismen

DEFINITION: ISOMORPHISMUS

In einer Kategorie **K** heißt der Morphismus $f : A \to B$ ein Isomorphismus, wenn es ein $g : B \to A$ gibt. so dass $gf = id_A$ und $fg = id_B$.

BEMERKUNG:

- g ist durch f eindeutig bestimmt und wird deshalb DAS Inverse von f genannt: $g = f^{-1}$.
- Kompositionen und Inverse von Isomorphismen sind wieder Isomorphismen.
- A und B heißen isomorph ($A \cong B$), wenn es einen Isomorphismus $f : A \to B$ gibt.
  $A \cong B$ ist eine Äquivalenzrelation auf Ob **K**.
- Die Klasse aller Isomorphismen von **K** wird mit **Iso(K)** bezeichnet.

Unterkategorien

DEFINITION: UNTERKATEGORIE

U heißt Unterkategorie von **K**, kurz $\mathbf{U} \subset \mathbf{K}$, wenn

- **U** aus Objekten, Morphismen und der Komposition $\circ$ von **K** besteht;
- **U** mit jedem Objekt A auch den identischen Morphismus id_A von **K** enthält.

Beispiel: Es sei $f : A \to B$ ein Morphismus in **K** mit $A \neq B$. Dann sind A und B die Objekte, id_A, id_B und f die Morphismen einer Unterkategorie von **K.**

Eine Unterkategorie heißt volle Unterkategorie, wenn für alle $A, B \in \text{Ob}\,\mathbf{K}$ alle Morphismen von **K** auch zu **U** gehören:

$$\forall A, B \in \text{Ob}\,\mathbf{K} : \mathbf{U}(A, B) = \mathbf{K}(A, B)$$

Funktoren

Es seien **K** und **L** Kategorien. Eine Abbildung $F : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ heißt ein (kovarianter) Funktor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

$$F(gf) = F(g)F(f), \text{ falls } gf \text{ definiert ist.}$$

Eine Abbildung $F : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ heißt ein kontravarianter Funktor,

wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

$$F(gf) = F(f)F(g), \text{ falls } gf \text{ definiert ist.}$$

Der kontravariante Funktor kehrt also nur die Pfeile um.

Funktoren respektieren die Identität und die Komposition von Morphismen (folglich auch Isomorphismen:
$F(\mathbf{Iso(K)} \subset \mathbf{Iso(L)})$).

Beispiele für Funktoren

- identischer Funktor *id*
- Inklusion einer Unterkategorie **U** (von **K**) in **K**
- konstanter Funktor $F : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$: Für alle $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$ und alle Morphismen f von **K** setzt man $F(A) = X$ und $F(f) = id_X$ für ein beliebiges $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{L}$.
- Vergiss-Funktor: $V : \mathbf{K} \to \mathbf{Set}$ ordnet jedem Objekt (mit einer bestimmten Struktur) die zugrundeliegenden Menge und jedem Morphismus die zugrunde liegende Mengenabbildung zu. Es gibt auch Vergiss-Funktoren, die nur einen Teil der Struktur vergessen.
- Vektorraum in seinen Dualraum:
  kontravarianter Funktor, der jeden Vektorraum $V \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vek}_{\mathbb{K}}$ in seinen Dualraum $V^* := \{f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ linear}\}$ und jede lineare Abbildung $\alpha : V \to W$, mit $W \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vek}_{\mathbb{K}}$ in ihre duale Abbildung $\alpha^* : W^* \to V^*$ mit $\alpha^*(f) = f\alpha$ überführt.
- Kompositionen von Funktoren

AUFGABE:

Zeige, dass für jeden Funktor $F : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$, $F^{-1}(\mathrm{Ob}\,\mathbf{L}) := \{u \in \mathbf{K} \mid F(u) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{L}\}$ der sogenannte Kern von F eine Unterkategorie von $\mathbf{K}$ ist.

Komposition von Funktoren, Varianz

Jeder Funktor F kann man seine Varianz $v : F \to \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ zuordnen:

$$v(F) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } F \text{ kovariant} \\ 1, & \text{wenn } F \text{ kontravariant} \end{cases}$$

SATZ 1:

Sind $F : \mathbf{K}_0 \to \mathbf{K}_1$ und $G : \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ Funktoren, so ist $G \circ F$ ein Funktor der Varianz $v(G \circ F) = v(G) + v(F)$.

Duale Kategorien

Zu jeder Kategorie $\mathbf{K}$ existiert eine duale Kategorie $\mathbf{K}^{op}$:

1. Ob $\mathbf{K}$ = Ob $\mathbf{K}^{op}$
2. Für alle $A, B \in$ Ob $\mathbf{K}^{op}$ ist $\mathbf{K}^{op}(A, B) = \mathbf{K}(B, A)$
   (Umkehrung aller Morphismen (Pfeile))

Für jede Kategorie hat man also den kontravarianten Funktor $Op : \mathbf{K} \to \mathbf{K}^{op}$. Dabei gilt $Op \circ Op = id$.

Jeder kontravariante Funktor $F' : \mathbf{K}^{op} \to \mathbf{L}$ kann dadurch auf einen kovarianten Funktor $F : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ zurückgeführt werden: $F' = F \circ Op$.

Der Begriff der dualen Kategorie erleichtert Beweise:

- Jeder Aussage entspricht eine duale Aussage durch Umkehren aller Pfeile (Dualisieren).
- Jeder Beweis für eine Aussage liefert durch Dualisieren einen Beweis für die duale Aussage.

Beispiel: $\mathbf{Iso}(\mathbf{K}^{op}) = \mathbf{Iso}(\mathbf{K})$, der Begriff des Isomorphismus ist also selbstdual.

Hom-Funktoren

Zwei spezielle Beispiele für Funktoren:

- Kovarianter Hom-Funktor: Sei $\mathbf{K}$ eine lokal kleine Kategorie. Für ein beliebiges $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$ definiert man den kovarianten Hom-Funktor $\mathbf{K}(A, \Box) : \mathbf{K} \to \mathbf{Set}$, indem man $K(A, \Box)(B) := K(A, B)$ für $B \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$ setzt und für einen Morphismus $f : B \to C$ die Mengenabbildung $\mathbf{K}(A, \Box)(f) := K(A, f) : \mathbf{K}(A, B) \to \mathbf{K}(A, C)$ durch $\mathbf{K}(A, f)(u) : fu, u \in \mathbf{K}(A, B)$ definiert.
- Kontravarianter Hom-Funktor: Sei $\mathbf{K}$ eine lokal kleine Kategorie. Für ein beliebiges $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$ definiert man den kovarianten Hom-Funktor $\mathbf{K}(A, \Box) : \mathbf{K} \to \mathbf{Set}$, indem man $K(\Box, A)(B) := K(B, A)$ für $B \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$ setzt und für einen Morphismus $f : B \to C$ die Mengenabbildung $\mathbf{K}(\Box, A)(f) := K(f, A) : \mathbf{K}(B, A) \to \mathbf{K}(C, A)$ durch $\mathbf{K}(f, A)(u) : uf, u \in \mathbf{K}(C, A)$ definiert.

Zu Hom-Funktoren isomorphe Funktoren nennt man auch darstellbar.

Natürliche Transformation

Definition: Natürliche Transformation

Seien $F, G : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ Funktoren. Eine natürliche Transformation $n : F \to G$ ordnet jedem Objekt $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$ einen Morphismus $n_A : F(A) \to G(A)$ in $\mathbf{L}$ derart zu, dass für jeden Morphismus $f : A \to B$ gilt

$$G(f) \circ n_A = n_B \circ F(f).$$

Äquivalent ist eine natürliche Transformation also auch eine Familie von Morphismen $(n_A)_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}}$.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "n_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
G(A) \arrow[r, "n_B"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Ist **K** leer, so gibt es nur den leeren Funktor und für diesen nur die triviale, leere natürliche Transformation.

Auch eine Komposition von natürlichen Transformationen ist möglich.

Zu jedem Funktor F existiert eine identische natürliche Transformation 1_F, die jedem Objekt A den Morphismus $1_{F(A)}$ zuordnet.

Beispiele für natürliche Transformationen

- identische natürliche Transformation $id : F \to F$
- Für **Grp** gibt es eine natürliche Transformation des identischen Funktors in den Funktor “abelsch machen”. Sie ordnet jeder Gruppe über die “natürliche” Projektion $G \mapsto G/K(G)$ ihre Faktorkommutatorgruppe zu, wobei $K(G) = \{a^{-1}b^{-b}ab | a, b \in G\}$ die Kommutatorgruppe von G ist.

BEMERKUNG:
Präzise zu formulieren, worin die “Natürlichkeit” etwa der Abbildung im letzten Beispiel besteht, war einer der Beweggründe zur Entwicklung der Begriffe “Kategorie”, “Funktor” und “natürliche Transformation” durch EILENBERG und MACLANE.

Zwei besondere Kategorien

Die Komposition von natürlichen Transformationen führt auf

LEMMA: FUNKTORKATEGORIEN

Sei $\mathbf{L}$ eine kleine und $\mathbf{K}$ eine beliebige Kategorie. Die Funktoren $\mathbf{K} \to \mathbf{L}$ sind die Objekte, ihre natürlichen Transformationen die Kompositionen der Funktorkategorie $[\mathbf{K}, \mathbf{L}]$, wobei die Komposition die der natürlichen Transformationen ist.

Die Komposition von Morphismen führt auf

LEMMA:

Die kleinen Kategorien bilden die Objekte, die Funktoren die Morphismen der Kategorie der kleinen Kategorien, kurz: **Cat**, wobei die Komposition die der Funktoren ist.

BEMERKUNG:

Sind $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$ kleine Kategorien, so ist die Morphismenmenge $\mathbf{Cat}(\mathbf{K}, \mathbf{L})$ gerade die Menge der Objekte für die Funktorkategorie $[\mathbf{K}, \mathbf{L}]$.

Diagramme

In Kategorien werden Diagramme (wie Dreiecke oder Rechtecke) meist zur anschaulichen Beschreibung von Produkten benutzt, die kommutativ sind, d.h. wenn ausgehend von einer Ecke und endend bei einer anderen Ecke die auf zwei verschiedenen Wegen durchlaufenen Morphismen gleich sind.

Definition: Diagramm

Ein Diagramm in einer Kategorie $\mathbf{K}$ ist ein Funktor $D : I \to \mathbf{K}$.
Die Kategorie I wird das Diagrammschema von D genannt.
Für $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}$ bildet das konstante Diagramm A_I alle Objekte von I auf A und alle Morphismen von I auf id_A ab.

Ein Morphismus $f : A \to B$ bewirkt eine natürliche Transformation $f_I : A_I \to B_I$ zwischen konstanten Diagrammen.

Bemerkung: Terminologie

Ein Diagramm ist ein besonders wichtiger Funktor.
Es bezeichne D_i das Bild eines Objektes i unter D.

Diagramme

DEFINITION: KOMMUTATIVES DIAGRAMM

Ein Diagramm $D : I \to \mathbf{K}$ heißt kommutativ, wenn für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\, I$ und alle $f, g \in I(A, B)$ gilt $D(f) = D(g)$.

BEMERKUNG: ALTERNATIVE DEFINITIONEN

Wir fassen Diagramme hier als Funktoren und Diagrammschemata als Kategorien auf.
Einige Autoren setzen Diagrammschemata jedoch mit Graphen gleich – fordern also keine Identität und Komposition – wodurch Diagramme auch keine Funktoren sind.
Kommutative Diagramme lassen sich dann jedoch eindeutig zu Funktoren fortsetzen.

Untere Schranke und Infimum (Limes)

Definition: Untere Schranke

Eine untere Schranke A (in $\mathbf{K}$) für das Diagramm $D : I \to \mathbf{K}$ ist eine natürliche Transformation $s : A_I \to D$ (d.h. eine Familie von Morphismen $s_i : A \to D_i$, $i \in \mathrm{Ob}\, I$).

$$\begin{tikzcd}
A_I(i) = A \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "A_I(g)=id_A"'] & D_i \arrow[d, "D(g)"] \\
A_I(j) = A \arrow[r, "s_j"'] & D_j
\end{tikzcd}$$

Folglich gilt für jeden I-Morphismus $i \xrightarrow{g} j$: $\quad s_j = D(g) \circ s_i$.

Untere Schranke und Infimum (Limes)

DEFINITION: LIMES (INFIMUM)

Ein Limes (auch Infimum genannt) L (in $\mathbf{K}$) für das Diagramm $D : I \to \mathbf{K}$ ist eine natürliche Transformation $\lambda : L_I \to D$ mit der (universellen) Eigenschaft:

Zu beliebiger unterer Schranke $s : A_I \to D$ gibt es **genau eine** natürliche Transformation f_I mit

$$s = \lambda \circ f_I.$$

$$\begin{tikzcd} L_I \arrow[rr, "\lambda"] & & D \\ A_I \arrow[u, dashed, "\exists! f_I"] \arrow[urr, "s"'] & & \end{tikzcd} \qquad bzw. \forall i \in \mathrm{Ob}\, I : \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\lambda_i"] & & D_i \\ A \arrow[u, dashed, "\exists! f"] \arrow[urr, "s_i"'] & & \end{tikzcd}$$

Obere Schranke und Supremum (Colimes)

Definition: Obere Schranke

Eine obere Schranke A (in $\mathbf{K}$) für das Diagramm $D : I \to \mathbf{K}$ ist eine natürliche Transformation $s : D \to A_I$ (d.h. eine Familie von Morphismen $s_i : D_i \to A$, $i \in \mathrm{Ob}\ I$).

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "D(g)"'] & A_I(i) = A \arrow[d, "A_I(g)=id_A"] \\ D_j \arrow[r, "s_j"'] & A_I(j) = A \end{tikzcd}$$

Folglich gilt für jeden I-Morphismus $i \xrightarrow{g} j$: $\quad s_i = s_j \circ D(g)$.

Obere Schranke und Supremum (Colimes)

Definition: Colimes (Supremum)

Ein Colimes (auch Supremum genannt) L (in $\mathbf{K}$) für das Diagramm $D : I \to \mathbf{K}$ ist eine natürliche Transformation $\lambda : D \to L_I$ mit der (universellen) Eigenschaft:

Zu beliebiger oberer Schranke $s : D \to A_I$ gibt es **genau eine** natürliche Transformation f_I mit

$$s = f_I \circ \lambda.$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "s"'] & L_I \arrow[d, dashed, "\exists! f_I"] \\
& A_I
\end{tikzcd}
\qquad bzw.\, \forall i \in \mathrm{Ob}\, I : \qquad
\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[dr, "s_i"'] & L \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Begriffsdeutung

Die Begriffe untere Schranke und obere Schranke sowie Infimum und Supremum in Kategorien sind konsequent, wenn man Kategorien als verallgemeinerte partiell geordnete Klassen ansieht und einen Morphismus $A \to B$ als “$A \leq B$” liest.

Eindeutigkeit des Limes

LEMMA: EINDEUTIGKEIT DES LIMES

Besitzt $D : I \to \mathbf{K}$ einen Limes (L, λ), so ist L durch D (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.

Analog gilt die Eindeutigkeit für den Colimes.

Das kategorielle Produkt

Können nun ein allgemeines (direktes) Produkt für mathematische Theorien definieren:

LEMMA: PRODUKT

Es sei $(A_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ eine Familie von **K**-Objekten.
Ein Produkt dieser Familie ist ein **K**-Objekt $X = \prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} A_i$ mit Morphismen $\pi_i : X \to A_i$, so dass gilt:
Ist $(s_i : Y \to A_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ gegeben, so gibt es genau einen Morphismus $f : Y \to X$ mit $s_i = \pi_i \circ f$ für alle $i \in \mathrm{Ob}\, I$.
Man nennt π_i die *i*-te Projektion des Produktes.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \\
Y \arrow[u, dashed, "\exists! f"] \arrow[ur, "s_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Das kategorielle Produkt

Lemma: Produkt

Es sei $(A_i)_{i \in \text{Ob } I}$ eine Familie von **K**-Objekten.
Ein Produkt dieser Familie ist ein **K**-Objekt $X = \prod_{i \in \text{Ob } I} A_i$ mit Morphismen $\pi_i : X \to A_i$, so dass gilt:
Ist $(s_i : Y \to A_i)_{i \in \text{Ob } I}$ gegeben, so gibt es genau einen Morphismus $f : Y \to X$ mit $s_i = \pi_i \circ f$ für alle $i \in \text{Ob } I$.
Man nennt π_i die i-te Projektion des Produktes.

Beweis:

Können das Produkt als Limes auffassen:
Wählen für I die diskrete Kategorie und $D_i := A_i$. Die natürliche Transformation λ erhält man durch $\lambda_i := \pi_i$ und $L := X$.
Die Eindeutigkeit des Produkts ergibt sich aus der Eindeutigkeit des Limes.

Das kategorielle Produkt

BEMERKUNG:
Die Existenz eines Produkts in einer Kategorie **K** setzt also die Existenz eines Limes in **K** voraus, was aber nicht für jedes Diagramm der Fall sein muss.

Kategorien, in denen jedes Diagramm einen Limes besitzt heißen vollständig.
Zu ihnen gehören: **Set**, **Vek**, $\mathbf{Vek}_{\mathbb{K}}$, **Grp**, **Top**, **Cat**.

Empfehlenswerte Literatur

Adámek, Herrlich, Strecker: **The Joy of Cats.**
(Online verfügbar!)