Zwei Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen

Sommercamp 2007

1 Beweis

Tschebyscheff said it and i say it again. There is always a prime between n and $2n$. Paul Erdös

Bemerkung 1. $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl y mit $y \leq x$.

Lemma 1. ***Legendre*** *a) Seien $n, q \in \mathbb{N}$. Genau $k = \lfloor n/q \rfloor$ Zahlen $\leq n$ sind durch q teilbar.*
b) $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ enthält die Primzahl p genau $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ mal.

Beweis: a) Division mit Rest ergibt $n = kq + r$ und es gilt dann $k = \lfloor n/q \rfloor$. Betrachten wir die Zahlen $q, 2q, 3q, \ldots, kq, (k+1)q$, so stellen wir fest $kq \leq n < (k+1)q$. Also sind genau k zahlen $\leq n$ durch q teilbar.
b) $\lfloor n/p \rfloor$ der Faktoren von $n!$ (der Zahlen $\leq n$) sind durch p teilbar, besitzen diesen Faktor also wenigstens einmal. Von diesen sind dann $\lfloor n/p^2 \rfloor$ sogar durch p^2 teilbar, besitzen also wenigstens zwei Faktoren p. Das geht jetzt so weiter $\lfloor n/p^3 \rfloor$ sind durch p^3 teilbar ... . In $n!$ kommt der Faktor p also genau $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ mal vor.

Lemma 2. ***Erdös*** *Für alle reellen Zahlen $x \geq 2$ gilt $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$. Dabei wird auf der linken Seite das Produkt über alle Primzahlen $\leq x$ genommen.*

Beweis: Beweis durch Induktion über $p \leq x$. Sei q die größte Primzahl $\leq x$, also $\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p$ und $4^{q-1} \leq 4^{x-1}$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $x = q$ eine Primzahl ist. Für $q = 2$ stimmt die Behauptung auch, also beschränken wir uns auf die ungeraden Primzahlen $q = 2m+1$, $m \geq 1$. Es gilt dann: $\prod_{p \leq 2m+1} p = (\prod_{p \leq m+1} p)(\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p) \leq 4^m \binom{2m+1}{m} \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}$.
Die erste Gleichung ist klar! Für die erste Ungleichung gilt $\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m$ nach Induktion. Weiterhin ist $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ und alle Primzahlen mit $m+1 < p \leq 2m+1$ teilen den Zähler, aber nicht den Nenner. Also $\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} = p_{i_1}^{k_1} \ldots p_{i_n}^{k_n}$, mit $k_l \geq 1$ und alle Primzahlen mit $m+1 < p \leq 2m+1$ sind darunter. Insgesamt demnach $(\prod_{p \leq m+1} p)(\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p) \leq 4^m \binom{2m+1}{m}$.
Für die zweite Ungleichung überlegt man sich, dass die beiden gleichen Binomialkoeffizienten $\binom{2m+1}{m}$ und $\binom{2m+1}{m+1}$ in der Summe $\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = (1+1)^{2m+1}$ vorkommen und deshalb $2\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m+1}$ gilt.

Lemma 3. ***Erdös*** *a) Es gilt $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$, für $n \geq 1$.*
b) $\binom{2n}{n}$ enthält die Primzahl p genau $\sum_{k \geq 1} (\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor) \leq max\{r \mid p^r \leq 2n\}$ mal.
c) Primzahlen p mit $\sqrt{2n} < p$ sind höchstens einmal in $\binom{2n}{n}$ enthalten.
d) Primzahlen p mit $(2/3)n < p \leq n$, $n \geq 3$, sind nicht in $\binom{2n}{n}$ enthalten!

Beweis: Es ist $4^n = (1+1)^{2n} = (\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2n}) + \binom{2n}{1} + ... + \binom{2n}{2n-1}$ und $\binom{2n}{n}$ ist der größte dieser $2n$ Summanden. Also $\frac{4^n}{2n} = \frac{1}{2n}[(\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2n}) + \binom{2n}{1} + ... + \binom{2n}{2n-1}] \leq \binom{2n}{n}$.
b) Nach Legendre ist die Anzahl der Faktoren p in $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ gleich $\sum_{k\geq 1}(\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor)$. Nun gilt $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2(\frac{n}{p^k} - 1) = 2$, also $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor \leq 1$ und damit $\sum_{k\geq 1}(\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor) \leq \sum_{p^k \leq 2n} 1 = max\{r \mid p^r \leq 2n\}$.
c) Wenn r die größte Potenz von p ist, die $\binom{2n}{n}$ teilt, dann $p^r \leq 2n$. Wenn p nun größer als $\sqrt{2n}$ ist, dann kann sie somit höchstens einmal in $\binom{2n}{n}$ enthalten sein.
d) Wenn $(2/3)n < p \leq n$, dann $2n < 3p$. Also ist p genau in den Faktoren p und $2p$ im Zähler von $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ enthalten, aber auch genau zweimal im Nenner; ergo: Überhaupt nicht im Bruch.

Satz 1. ***Bertrands Postulat*** *Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.*

Beweis (Erdös): Wir zeigen die Aussage erst für $n \leq 4000$. Hierfür genügt es nachzurechnen, dass $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$ eine Folge von 14 Primzahlen mit $p_{k+1} < 2p_k$ ist. Jedes Intervall $[n, 2n]$, $n \leq 4000$ enthält dann eine dieser Zahlen (2 Fälle: n ist eine dieser Zahlen, oder $p_k < n < p_{k+1}$ ...). Ganz allgemein gilt nun:
$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq (\prod_{p\leq\sqrt{2n}} 2n)(\prod_{\sqrt{2n}<p\leq(2/3)n} p)(\prod_{n<p\leq 2n} p)$ (Lemma 3).
Also $4^n \leq 2n(2n)^{\sqrt{2n}}(\prod_{\sqrt{2n}<p\leq(2/3)} p)(\prod_{n<p\leq 2n} p)$.
Wenn es nun keine Primzahlen p mit $n < p \leq 2n$ gibt, das heißt $\prod_{n<p\leq 2n} p = 1$ gilt, so erhalten wir mit Lemma 2):
$4^n \leq (2n)^{\sqrt{2n}+1} 4^{(2/3)n-1} \leq (2n)^{\sqrt{2n}+1} 4^{(2/3)n}$, also $4^{n/3} \leq (2n)^{\sqrt{2n}+1}$ $(*)$.
Wir verwenden nun $m + 1 < 2^m$ (trivial durch Induktion) und erhalten:
$2n = \sqrt[6]{2n}^6 < (\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor + 1)^6 < 2^{6\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}$. Für $n \geq 50$ folgt $18 < 2\sqrt{2n}$, also $2^{2n} = 4^n \leq (2n)^{3(\sqrt{2n}+1)} < 2^{\sqrt[6]{2n}(18+18\sqrt{2n})} < 2^{20\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{2/3}}$ und somit $2n < 20(2n)^{2/3} \Rightarrow n < 4000$ - Widerspruch!

2 Beweis: Die Divergenz der Reihe $\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-1}$.

Satz 2. *Die Reihe $\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-1}$ divergiert.*

Beweis (Erdös): Sei $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, ...\}$, $p_k < p_{k+1}$ die Menge der Primzahlen. Annahme: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-1}$ konvergiert. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=k+1}^{\infty} p_i^{-1} < 1/2$, für jede Zahl N gilt also $\sum_{i\geq k+1} N/p_i < N/2$.
Für diesen Beweis nennen wir $p_1, ..., p_k$ kleine Primzahlen und die restlichen große Primzahlen. Sei N_b die Anzahl der Zahlen $n \leq N$, die einen großen Primfaktor haben und sei N_s die Anzahl der Zahlen $n \leq N$, die nur kleine Primfaktoren besitzen. Es gilt also $N = N_b + N_s$.
Nach Legendre ist $\lfloor N/p_i \rfloor$ die Anzahl aller $n \leq N$ mit $p_i | n$. Das ergibt $N_b = \sum_{i\geq k+1} \lfloor N/p_i \rfloor \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} N/p_i < N/2$.
Betrachten wir nun Zahlen $n \leq N$, die nur kleine Primteiler besitzen. Sei n eine solche. Wir schreiben diese dann als $n = a_n b_n^2$, wobei a_n den quadratfreien Teil bezeichnet(z.B. $5625000 =$

$2^3 3^2 5^7 = 2\cdot 5(2\cdot 3\cdot 5^3)^2 = 10\cdot 750^2$). a_n ist dann ein Produkt von **verschiedenen** kleinen Primzahlen, insgesamt gibt es demnach 2^k viele (verschiedene) quadratfreie Teile.
Außerdem gibt es höchstens $\sqrt{N}$ viele verschiedene Quadratteile, denn $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$. Das heißt $N_s \leq 2^k\sqrt{N}$. Nun gibt es aber $N \in \mathbb{N}$ mit $2^k\sqrt{N} < N/2$ (z.B. $N = 2^{2k+3}$). Solch ein N führt nun alles zum Widerspruch $N_b + N_s < N$.

Martin Aigner, Günther M.Ziegler: Das BUCH der Beweise; Springer