Vollständige Induktion

Tobias Strauß

16.10.2009

1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Die vollständige Induktion ist eines der wichtigsten Beweisprinzipien in der Mathematik. Nicht nur in der diskreten Mathematik wird diese Technik angewandt. Dort, wo mit endlichen Mengen, deren Größe unbekannt ist, bzw. mit abzählbar unendlichen Mengen gearbeitet wird, stößt man oft auf eine Induktion. Das Verfahren tauchte erstmals 1575 auf, wurde aber bis 1879 nur in der Zahlentheorie genutzt. Der Begriff leitet sich vom lateinischen *inductio* ab und bedeutet so viel wie Hinaufführung. Das beschreibt auch schon ganz gut das Prinzip der Induktion. Wir führen das Unbekannte auf das Bekannte zurück, oder um gekehrt, das Bekannte hinauf zum Unbekannten.

Das Prinzip ist einfach.

Nehmen wir an, wir möchten eine Aussage beweisen, beispielsweise die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Die Aussage soll von einer natürlichen Zahl n abhängen. In unserem Beispiel wird eine explizite Formel für die Summe der Zahlen von 1 bis n gegeben.

Wir überprüfen die Aussage für eine kleine Zahl n_0. Üblicherweise ist n_0 die kleinste Zahl, für die die Aussage zutrifft. Für $n_0 = 1$ ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1$$

und

$$\frac{1}{2}1(1+1) = 1.$$

Also gilt die Aussage für $n = 1$. Als nächstes zeigen wir, dass die Aussage für $n+1$ gilt, wenn wir annehmen, dass sie für n gilt.

Voraussetzung: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

Beweis.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = n+1+\sum_{i=1}^{n} i$$

Nach Voraussetzung gilt

$$= n + 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$$

Durch Ausklammern erhalten wir

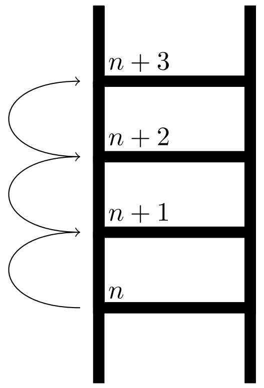
$$= (n+1)\left(1 + \frac{1}{2}n\right)$$

Jetzt ziehen $\frac{1}{2}$ vor die Klammer

$$= \frac{1}{2}(n+1)\,(n+2)$$

Das ist die Behauptung. $\square$

Was haben wir jetzt bewiesen? Wir haben gezeigt, dass die Aussage für $n = 1$ gilt. Außerdem haben wir gezeigt, dass, wenn die Gleichung für n gilt, so gilt sie auch für $n + 1$. Damit gilt die Gleichung für alle n. Das Ganze kann man sich auch als Leiter vorstellen, auf der man Stufe für Stufe hinaufklettert.



Fassen wir zusammen.

Prinzip der vollständigen Induktion: Es sei eine Aussage A zu beweisen, die von der natürlichen Zahl n abhängt, also $A(n)$.

1. **Induktionsverankerung:** Zu zeigen ist, dass $A(n_0)$ gilt.
2. **Induktionsschritt:** Zu zeigen ist, dass für alle $n \geq n_0$ aus $A(n)$ auch $A(n+1)$ folgt.

Aufgabe 1. *Zeige, dass* $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Beweis. $\underline{n = 1}$: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1}{6}1(1+1)(2+1)$.
$\underline{n \to n+1}$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+1)^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$
\begin{aligned}
&= (n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= (n+1)\left(n+1+\frac{1}{6}n(2n+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(6n+6+n(2n+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+7n+6\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n+3\right)\left(n+2\right)
\end{aligned}
$$

□

Wichtig dabei ist die Induktionsverankerung. Wird sie vergessen, so kann das gesamte Fundament, auf der die Behauptung steht, wegbrechen. Mit um bei unserer Metapher, der Leiter, zu bleiben: Man muss den ersten Fuß auf eine Leitersufe setzen und nicht daneben, sonst kommt man die Leiter nicht hinauf. Wir zeigen, dass die ungerade Zahl $2n+1$ immer durch 2 teilbar ist. Dies ist offenbar ein Falschaussage. $n \to n+1$: Wir nehmen an, die Aussage sei richtig für n. Also $2|2n+1$. Dann teilt 2 auch die Summe der durch 2 teilbaren Zahlen $2n+1$ und 2, nämlich $2n+3 = 2(n+1)+1$.

Hier wurde ganz klar versäumt eine Induktionsverankerung durchzuführen.

Aufgabe 2. *Zeige:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Beweis. <u>$n=1$:</u> Trivial, denn auf beiden Seiten steht $\frac{1}{2}$.

<u>$n \to n+1$:</u>

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1+n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3. *Zeige: Wenn man* $2n$ *Punkte durch* n^2+1 *Kanten verbindet, so gibt es wenigstens 3 Punkte, von denen jeweils zwei eine gemeinsame Kante haben.*

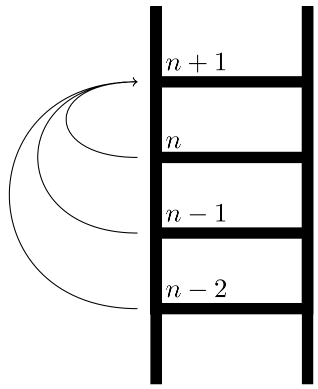
Beweis. Wir zeigen, dass ein Graph mit $2n$ Punkten ohne Dreieck höchstens n^2 Kanten besitzt. <u>$n=1$:</u> Klar, denn zwei Punkte sind durch höchstens eine Kante verbunden und enthalten auch kein Dreieck.

<u>$n \to n+1$:</u> Angenommen G ist ein Graph mit $2n+2$ Punkten ohne Dreieck. Wähle zwei Punkte A und B, die durch eine Kante verbunden sind. Entferne diese beiden Punkte und alle Kanten, auf denen

A oder B liegen. Der entstehende Untergraph G' enthält immer noch kein Dreieck und hat daher nach Induktionsvoraussetzung höchstens n^2 Kanten. Wenn A mit einem Punkt C aus G' verbunden ist, so kann C offenbar nicht auch noch mit B verbunden sein, denn sonst entstünde ein Dreieck ABC. Die Anzahl der Punkte in G', die mit A verbunden sind, sei x. Dann ist die Anzahl der Punkte, die mit B verbunden sind, höchstens $2n - x$. Die Anzahl der Kanten in G ist also kleiner gleich $\underbrace{n^2}_{G'} + \underbrace{x}_{A} + \underbrace{2n - x}_{B} + \underbrace{1}_{\overline{AB}} = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. □

2 Starke Induktion

Bei der starken Induktion benutzt man nicht nur, dass der vorherige Schritt richtig ist. Statt dessen nimmt man an, dass die Behauptung für $n_0, \ldots, n$ bewiesen ist. Schauen wir uns das Ganze nochmal auf der Leiter an.



Prinzip der starken Induktion: Es sei eine Aussage A zu beweisen, die von der natürlichen Zahl n abhängt, also $A(n)$.

1. **Induktionsverankerung:** Zu zeigen ist, dass $A(n_0)$ gilt.
2. **Induktionsschritt:** Wir nehmen an, dass die Aussage $A(k)$ für alle $k \in \{n_0, \ldots, n\}$ gilt. Zu zeigen ist, dass auch $A(n + 1)$ richtig ist.

Satz 1 (Hauptsatz der Zahlentheorie)**.** *Jede natürliche Zahl ($n \geq 2$) besitzt eine Primfaktorenzerlegung.*

Beweis. Induktionsverankerung: $n = 2$: 2 ist eine Primzahl.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$: Sei bereits bewiesen, dass für alle $2 \leq k \leq n$ eine Primfaktorenzerlegung existiert. Wir müssen zeigen, dass $n + 1$ eine Primfaktorenzerlegung besitzt. Ist $n + 1$ eine Primzahl, so sind wir fertig, im anderen Fall ist $n = a \cdot b$ $(a, b \geq 2)$. Da $a \leq n$ und $b \leq n$ ist, besitzen beide eine Primfaktorenzerlegung und damit auch $n + 1$. □

3 Fibonacci-Folge

Der italienische Mathematiker *Leonardo von Pisa*, auch *Fibonacci* (Sohn des Bonacci) genannt, veröffentlichte 1202 n.C. das Buch *Liber Abbaci*. Dort stellte der vor allem die Vorzüge des arabischen Zahlensystems gegenüber dem lateinische dar. Das arabische System, mit dem wir heute rechnen, hatte sich bis dahin noch nicht durchgesetzt. Berühmt wurde das Buch aber durch eine Aufgabe, welche die Anzahl der zu erwartenden Kaninchen eines Züchters innerhalb eines Jahres schätzte.

Modell einer Kaninchenpopulation Fibonacci machte folgende Annahmen:

- Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
- Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
- Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- Die Tiere befinden sich in einem abgeschlossenen Raum („in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus“), so dass kein Tier die Population verlassen und keines von außen hinzukommen kann.

Anfangs hat der Züchter also 1 Paar, welches im zweiten Monat geschlechtsreif wird. Im dritten Monat kommt dann ein weiteres Paar hinzu usw.

Aufgabe 4. *Finde eine rekursive Bildungsvorschrift, mit der man die Anzahl f_{n+1} der Tiere nach $n+1$ Monaten berechnen kann, unter der Bedingung, dass alle Anzahlen früherer Zeitpunkte bekannt sind.*

Beweis. Die Anzahl der Tiere nach $n+1$ Monaten, ergibt sich aus der Anzahl f_n der Tiere, die nach n Monaten vorhanden waren, addiert mit der Anzahl neugeborener Tiere. Die Anzahl der geschlechtsreifen Tiere ist gleich der Anzahl f_{n-1} der Tiere, die schon vor $n-1$ Monaten lebten. Also

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

□

Definition 2. Die Zahlen $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und für $n \geq 2$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

heißen *Fibonacci-Zahlen*. Ein anderer wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist der *goldene Schnitt*. Der goldene Schnitt ist die positive Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Die Nullstellen der Gleichung sind $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 5. *Zeige: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Beweis. <u>$n = 1$:</u>

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = f_1$$

<u>$n = 2$:</u>

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 = f_2$$

$\underline{n-1, n \to n+1\text{:}}$ $n \geq 2$

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} = f_n + f_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)
\end{aligned}
$$

Da $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ lösen, gilt

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \text{ und } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1.$$

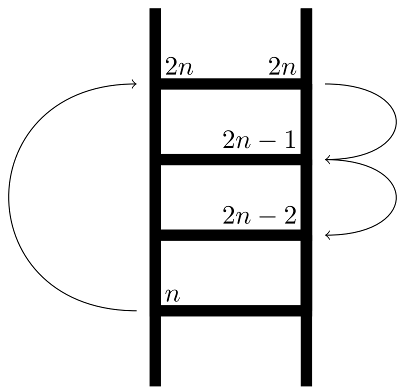
Daher ist

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

□

4 Vorwärts-Rückwärts-Induktion

Bei der Vorwärts-Rückwärts-Induktion wird, wie bei allen anderen Varianten, die Induktionsverankerung überprüft. Der der Induktionsschritt besteht hier aber aus zwei Teilen. Von n wird zuerst auf ein $m \geq n+2$ geschlossen. Im zweiten Schritt wird dann gezeigt, dass die Behauptung auch für $n-1$ richtig ist, wenn sie für n gilt. Wir veranschaulichen uns die Methoden an der Leiter.



Mit der Vorwärts-Rückwärts-Induktion kann man z.B. Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel beweisen.

Satz 3. *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$$

Beweis. $\underline{n=1}$: trivial, denn $x_1 = x_1$

Für diesen speziellen Beweis benötigen wir allerdings noch den Fall $\underline{n=2}$:

$$\begin{aligned}
(x_1x_2)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{1}{2}(x_1+x_2) \\
\Leftrightarrow 2(x_1x_2)^{\frac{1}{2}} &\leq (x_1+x_2) \\
\Leftrightarrow 4(x_1x_2) &\leq (x_1+x_2)^2 \\
\Leftrightarrow 4(x_1x_2) &\leq x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 \\
\Leftrightarrow 0 &\leq x_1^2+x_2^2-2x_1x_2 \\
\Leftrightarrow 0 &\leq (x_1-x_2)^2 \quad \text{w.A.}
\end{aligned}$$

$\underline{\text{Vorwärtsschritt: } n \to 2n}$:

In Wahrheit benutzen wir sogar noch die starke Induktion. Wir setzen nämlich immer zusätzlich voraus, dass die Behauptung für $n=2$ richtig ist. Seien

$$a = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

und

$$b = (x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot x_{n+3} \cdot \ldots \cdot x_{n+n})^{\frac{1}{n}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{1}{2}(a+b), \\
a &\leq \frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n), \\
b &\leq \frac{1}{n}(x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}+\ldots+x_{2n}),
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &= (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n) + \frac{1}{n}(x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}+\ldots+x_{2n})\right) \\
&= \frac{1}{2n}(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2n})
\end{aligned}$$

$\underline{\text{Rückwärtsschritt: } n \to n-1}$:

Wir setzen

$$c := (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}.$$

Dann gilt

$$c = (c^n)^n = (c^{n-1} \cdot c)^n = ((x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) \cdot c)^{\frac{1}{n}}.$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\leq \frac{1}{n}((x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1})+c).$$

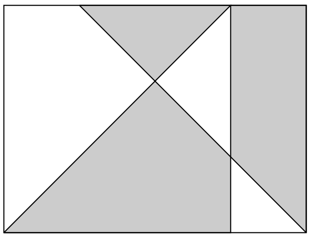


Abbildung 1: Beispiel für eine Landkarte

Wir holen jetzt $\frac{c}{n}$ von der rechten auf die linke Seite.

$$c - \frac{1}{n}c = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}\right)$$

Daraus folgt

$$(n-1)c \leq \left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}\right).$$

□

5 Landkarten schwarz-weiß

In der Mathematik gibt es ein berühmtes Problem, welches sich mit der Färbung von Landkarten beschäftigt. Eine im Jahre 1852 aufgestellte Vermutung besagt, dass sich jede beliebige Landkarte durch nur vier Farben darstellen lässt, so dass je zwei verschiedene Länder mit gemeinsamer Grenze nicht gleich gefärbt sind. Solche Färbungen von Landkarten nennen wir im Folgenden *zulässig*. Diese Vermutung wurde erst über hundert Jahre später gelöst. Zwei Amerikaner lösten das Problem 1976 mit Hilfe eines Computerprogramms. Der sogenannte *Vier-Farben-Satz* gilt als der erste durch Computerhilfe bewiesene Satz in der Geschichte.

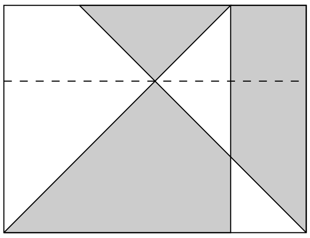
Wir werden eine ganz ähnliche Aufgabe betrachten. Um das Problem für uns zu vereinfachen, lassen wir nur Landkarten zu, deren Ländergrenzen durch Geraden erzeugt werden. Solche Landkarten benötigen nur zwei Farben für eine zulässige Färbung. Länder, deren Grenze aus genau einem Punkt besteht, dürfen gleich gefärbt sein.

Satz 4. *Jede Landkarte, deren Ländergrenzen Geraden bilden, kann durch zwei Farben (schwarz und weiß) so gefärbt werden, dass Länder mit einer gemeinsamen Grenze nicht gleich gefärbt sind.*

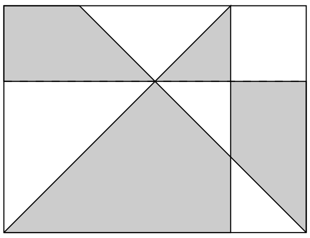
Beweis. Um eine Induktion durchzuführen, benötigen wir eine Behauptung, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Die Aussage für jede beliebige Anzahl von Graden nachzuweisen ist die vielleicht naheliegendste Idee. Wir führen also eine Induktion über die Anzahl der Geraden durch.

$\underline{n = 1}$: Für eine Karte, die durch eine Gerade getrennt wird, ist die Behauptung einfach. Man färbt den einen Teil der Karte schwarz und den Anderen weiß. Also kann jede Karte, die durch eine Gerade getrennt wird, zulässig mit zweifarbig gefärbt werden.

$\underline{n \to n + 1}$: Wir setzen also voraus, dass jede Karte mit n Farben zulässig gefärbt werden kann. Wir müssen zeigen, dass auch dann eine zulässige Färbung existiert, wenn wir eine weitere Kante hinzunehmen. Dazu drehen wir die Karte so, dass die hinzugefügte Kante horizontal verläuft.



Dieses neue Karte ist offenbar noch nicht zulässig gefärbt. Wie ändern wir das jetzt? Wir färben den Teil, der oberhalb der neuen Geraden ist, um. D.h., die Bereich„ die vorher weiß waren färben wir jetzt schwarz und umgekehrt.



Nun müssen wir zeigen, dass diese Färbung immer zulässig ist. Seien L_1 und L_2 benachbarte Länder der Landkarte mit $n + 1$ Geraden. Um zu zeigen, dass L_1 und L_2 nicht die gleiche Farbe haben, führen wir eine Fallunterscheidung durch.

<u>1. Fall:</u> Beide Länder liegen unterhalb der neu hinzugefügten Geraden. Dann haben wir die Farben nicht verändert und beide Länder müssen wegen der Induktionsvoraussetzung unterschiedlich gefärbt sein.

<u>2. Fall:</u> Beide Länder liegen oberhalb der $n + 1$-ten Geraden. Dann waren beide Länder vorher unterschiedlich gefärbt. Da wir die Färbung nur umgekehrt haben, ist jetzt das Land, welches vorher weiß war, jetzt schwarz und umgekehrt.

<u>3. Fall:</u> Ein Land liegt oberhalb, das andere unterhalb der neuen Geraden. Dann muss die Grenze der beiden Länder ein Teil der hinzugefügten Geraden sein. Das heißt, beide Länder bildeten vor der Hinzunahme der letzten Geraden ein Land und waren daher gleich gefärbt. Da die Färbung im oberen Teil der Karte umgekehrt und im unteren Teil der Karte beibehalten wurde, müssen die Länder unterschiedlich gefärbt sein.

Daher ist die Färbung zulässig und der Satz bewiesen. □

6 IMO-Aufgabe (Canberra 1988)

Aufgabe 6. *Seien a und b zwei natürliche Zahlen, für die $a^2 + b^2$ durch $ab + 1$ teilbar ist. Dann gilt*

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = ggT(a, b)^2.$$

Löse diese Aufgabe mit Hilfe der starken Induktion.

Bemerkung 5. Offensichtlich ist die Aussage immer gültig, wenn genau einer der beiden Faktoren 0 ist. Weitere Beispiele sind $(1, 1)$, $(8, 2)$, $(27, 3)$, $(30, 8)$ und $(64, 4)$. Unter der Bedingung, dass beide Faktoren kleiner 100 sind, gibt es keine weiteren Beispiele.

Beweis. Die Induktionsvariable sei ab.
$\underline{ab = 0, 1}$: Für $ab = 0$ (mit o.B.d.A. $b \neq 0$) ist die Behauptung klar, ebenso für $a = b = 1$.
$\underline{ab > 1}$: Die Induktionsvoraussetzung ist also: Für alle natürlichen Zahlen c, d, für die $c^2 + d^2$ durch $cd + 1$ teilbar ist und für die $cd < ab$ gilt, ist

$$\frac{d^2 + c^2}{cd + 1} = ggT(c, d)^2.$$

Wie gehen wir vor? Wir zeigen:

- Es existiert eine Zahl $c \in \mathbb{N}$, für die $a^2 + c^2$ durch $ac + 1$ teilbar ist.
- Außerdem gilt $c < b$.
- Weiter ist
$$\frac{a^2 + c^2}{ca + 1} = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$
und $ggT(c, a) = ggT(a, b)$.

Wenn wir dies alles gezeigt haben, können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden. Demnach ist dann

$$ggT(a, b)^2 = ggT(c, a)^2 = \frac{a^2 + c^2}{ca + 1} = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

Also ran.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $a \leq b$ und definieren

$$q := \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} > 0.$$

Wenn wir b durch die Unbekannte x ersetzen, erhalten wir eine quadratische Gleichung, deren eine Lösung b ist.

$$x^2 - aqx - q + a^2 = 0$$

Wir wollen jetzt die zweite Nullstelle finden, welche wir mit c bezeichnen.

$$0 = x^2 - aqx - q + a^2 = (x - c)(x - b) = x^2 - (c + b)x + cb$$

Offensichtlich ist $-(c + b) = -aq$ (Satz von Vieta). Daber ist $c = aq - b \in \mathbb{Z}$ und $ggT(a, c) = ggT(a, b)$. Wenn wir zeigen können, dass $0 \leq c < b$, gilt die Induktionsvoraussetzung. Dann ist

$$\frac{a^2 + c^2}{ca + 1} = ggT(c, a)^2 = ggT(a, b)^2 = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

Wegen

$$q = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} < \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

und $a \leq b$ gilt

$$aq < \frac{a^2}{b} + b \leq \frac{b^2}{b} + b = 2b \Rightarrow aq - b < b \Rightarrow c < b.$$

Da c ganzzahlig ist und $q > 0$, folgt

$$q = \frac{a^2 + c^2}{ca + 1} \Rightarrow ca + 1 > 0 \Rightarrow c > -\frac{1}{a} \Rightarrow c \geq 0.$$

$\square$