Dreiecksgeometrie

David Willimzig

27. März 2014

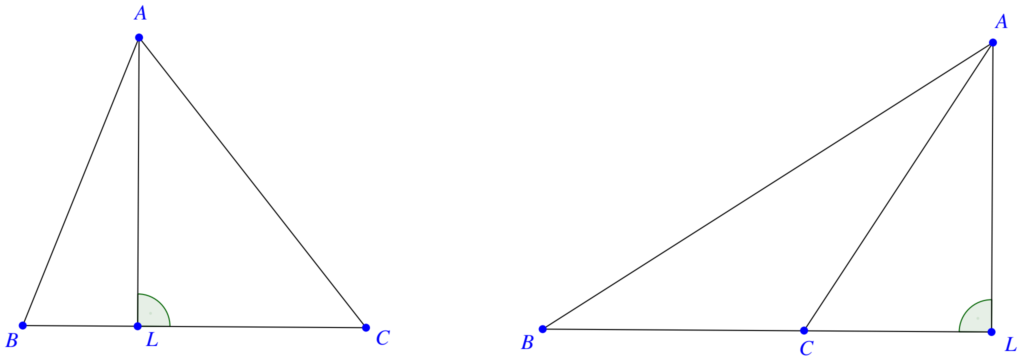
1 Rund ums Dreieck

1 Von Längen und Flächen

Bezeichungen. *Gegeben sei ein Dreieck ABC mit Seitenlängen a,b,c. Wir schreiben s für den Halbumfang von ΔABC und F für seine Fläche. Mit l_a,l_b,l_c und m_a,m_b,m_c seien schließlich die Längen der Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden des Dreiecks gemeint.*

Lemma 1.1. *Der Fußpunkt der Höhe auf die Seite BC sei L, dann gilt*

$$LC = \frac{|a^2+b^2-c^2|}{2a}.$$



Beweis. Setze $u = LC$. Wir haben zwei Fälle.
Fall 1: Es gilt $B,C \leq 90°$. Nach Pythagoras ist dann $AL^2 = b^2-u^2 = c^2-(a-u)^2$, also $b^2-u^2 = c^2-a^2+2au-u^2 \Rightarrow u = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ und wegen $a^2+b^2 \geq c^2$ ist die rechte Seite bereits ≥ 0.
Fall 2: Es ist o.B.d.A. $C > 90°$. Dann folgt analog $AL^2 = b^2-u^2 = c^2-(a+u)^2$, das heißt $b^2-u^2 = c^2-a^2-2au-u^2 \Rightarrow u = \frac{c^2-a^2-b^2}{2a}$. Da $a^2+b^2 < c^2$, gilt also $u = \frac{|a^2+b^2-c^2|}{2a}$. □

Eine unmittelbare Folgerung ist der

Satz 1.1 (Cosinussatz). *Für den Winkel bei C gilt*

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

oder äquivalent

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Analoges gilt für die anderen Innenwinkel von Dreieck ABC.

Beweis. Wir unterscheiden die gleichen Fälle.
Fall 1: $B, C \leq 90°$. Es folgt $\cos B = \frac{u}{b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.
Fall 2: $C > 90°$. Dann gilt $\cos\angle LCA = \frac{u}{b} = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}$ und demnach $\cos C = \cos(180° - \angle LCA) = -\cos\angle LCA = -\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. □

Satz 1.2 (Heron-Formel).

$$F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Beweis. Für die Länge h der Höhe auf BC erhalten wir nach Pythagoras und Lemma 1.1

$$h^2 = b^2 - CL^2 = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
F^2 = \frac{1}{4}a^2h^2 &= \frac{1}{16}\left(4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\right) \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{1}{16}\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\left((a+b)^2 - c^2\right)\left(c^2 - (a-b)^2\right) \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \\
&= s(s-a)(s-b)(s-c).
\end{aligned}$$

Bei $(\star)$ haben wir dabei geschickt Gebrauch von der 3. Binomischen Formel gemacht. □

Übung 1 (A 441031). *Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Würfel mit der Kantenlänge 1. Auf seiner Kante BC liegt ein Punkt J mit $3 \cdot CJ = BC$, auf der Kante $A'D'$ liegt ein Punkt M mit $3 \cdot A'M = A'D'$. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks MDJ.*

Beweis. Offenbar ist $CJ = A'M = \frac{1}{3}$. Weiter sind ΔCJD und $\Delta DMD'$ rechtwinklig, also nach Pythagoras $DJ = \frac{1}{3}\sqrt{10}$, $DM = \frac{1}{3}\sqrt{13}$ und MJ als Raumdiagonale in einem Teilquader hat die Länge $MJ = \frac{1}{3}\sqrt{19}$. Aus der Herleitung der Heron-Formel haben wir für ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c die alternative Formel

$$[MDJ]^2 = \frac{1}{16}\left(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2\right).$$

Mit $a = DJ$, $b = DM$, $c = MJ$ erhalten wir

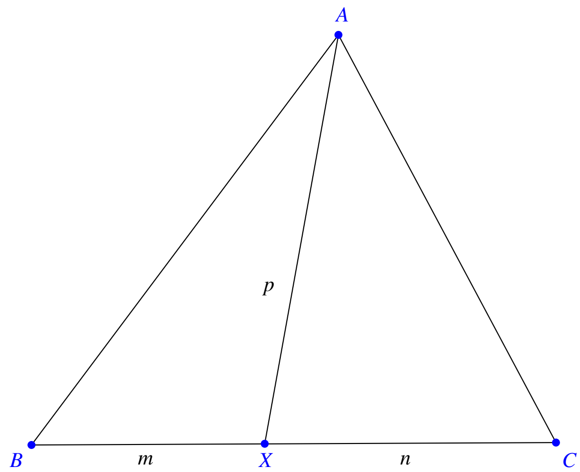
$$[MDJ]^2 = \frac{1}{16 \cdot 81}\left(-10^2 - 13^2 - 19^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13 + 2 \cdot 13 \cdot 19 + 2 \cdot 19 \cdot 10\right) = \frac{7}{18}$$

und damit $[MDJ] = \sqrt{\frac{7}{18}} \approx 0.623$. □

Mit dem Cosinussatz können wir zudem ein nützliches Resultat ableiten:

Satz 1.3 (Stewart). *Sei AX eine Ecktransversale der Länge p, die die Strecke BC in zwei Strecken mit den Längen $BX = m$ und $XC = n$ teilt. Dann gilt:*

$$a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n.$$



Beweis. Wir wenden den Cosinussatz in den Dreiecken ABX und AXC an:

$$\cos\angle AXB = \frac{m^2 + p^2 - c^2}{2mp}, \quad \cos\angle AXC = \frac{n^2 + p^2 - b^2}{2np}.$$

Wegen $\angle AXB + \angle AXC = 180^\circ$ gilt aber $\cos\angle AXB + \cos\angle AXC = 0$ und Addition der oben stehenden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} 0 = \frac{m^2 + p^2 - c^2}{2mp} + \frac{n^2 + p^2 - b^2}{2np} &= \frac{m^2 n + p^2 n - c^2 n + mn^2 + p^2 m - b^2 m}{2mnp} \\ &\Leftrightarrow 0 = mn(m+n) + p^2(m+n) - b^2 m - c^2 n \\ &\Leftrightarrow a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n. \end{aligned}$$

□

Übung 2 (Zu Seitenhalbierenden). *Der Mittelpunkt von BC sei M. Dann hat die Seitenhalbierende AM die Länge*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Beweis. Wende den *Satz von Stewart* auf die Transversale AM an. Mit $m = BM = \frac{a}{2}$, $n = MC = \frac{a}{2}$ erhalten wir

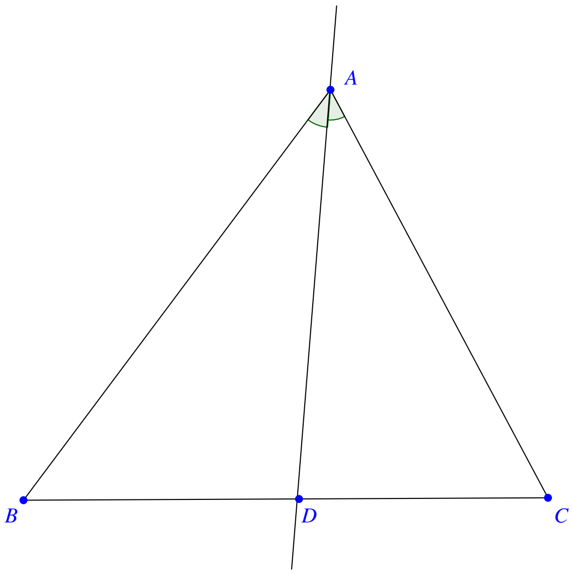
$$\begin{aligned} a\left(m_a^2 + \frac{a^2}{4}\right) &= \frac{a}{2}(b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow m_a^2 &= \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{4} \\ \Leftrightarrow m_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \end{aligned}$$

□

Übung 3 (Zu Winkelhalbierenden). *Die Halbierende des Winkels bei A schneide BC in D. Dann gilt:*
(i) AD teilt die Seite BC im Verhältnis der anliegenden Seiten, also $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$. (Tipp: Sinussatz)
(ii) AD hat die Länge

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}.$$

Entsprechende Aussagen gelten natürlich für die anderen Winkelhalbierenden.



Beweis. (i) Nach Voraussetzung ist $\angle BAD = \angle DAC = \frac{A}{2}$. Der Sinussatz in den Dreiecken ABD und ADC besagt nun

$$\frac{BD}{c} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\angle ADB}, \quad \frac{DC}{b} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\angle ADC}.$$

Aus $\angle ADB + \angle ADC = 180°$ folgt andererseits $\sin\angle ADB = \sin\angle ADC$. Die direkte Konsequenz obiger Gleichungen ist damit $\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b}$ oder $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$.
(ii) Aus $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ folgt $\frac{BD}{a} = \frac{BD}{BD+DC} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c}$ und $DC = \frac{ab}{b+c}$. Der *Satz von Stewart* liefert daher

$$a\left(l_a^2 + \frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}\right) = b^2\cdot\frac{ac}{b+c} + c^2\cdot\frac{ab}{b+c}$$
$$\Leftrightarrow l_a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c)}{b+c}$$

und folglich

$$\begin{aligned} l_a^2 = bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} &= bc \cdot \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} \\ &= bc \cdot \frac{4s(s-a)}{(b+c)^2} \\ \Rightarrow l_a &= \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}. \end{aligned}$$

□

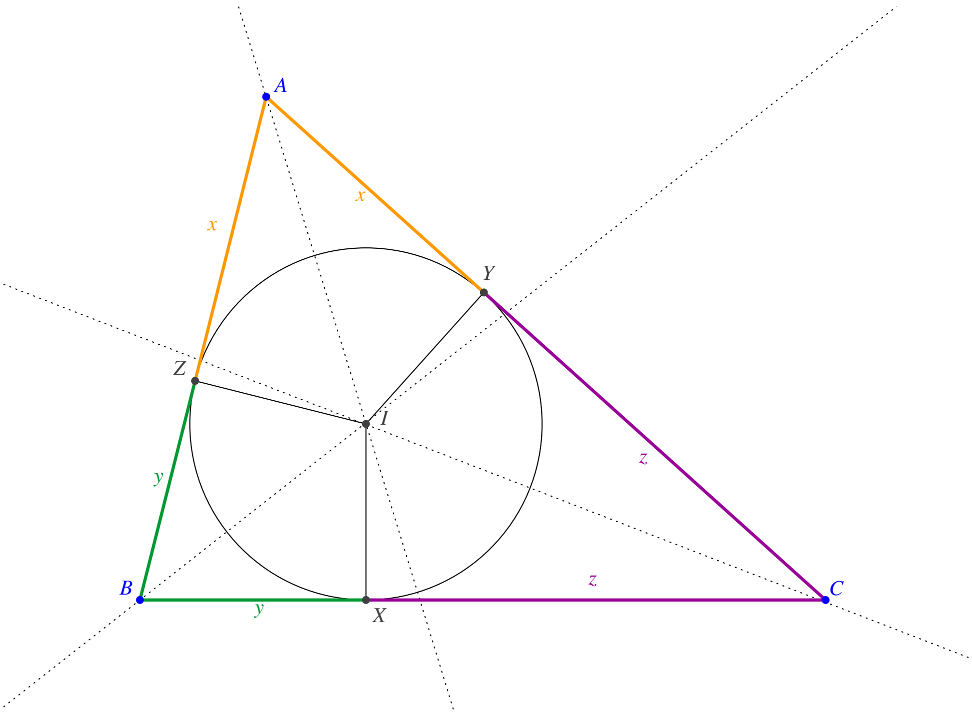
2 Inkreis, Ankreise und Umkreis

Bezeichungen. *Mit O bzw. I bezeichnen wir die Mittelpunkte von Umkreis und Inkreis des ΔABC sowie mit I_a, I_b, I_c die Mittelpunkte der Ankreise k_a, k_b, k_c, die zu den Seiten BC, CA, AB gehören. Ferner seien R und r der Umkreis- und Inkreisradius sowie r_a, r_b, r_c die Radien der Ankreise.*

Die Streckenlängen $s, s-a, s-b, s-c$ tauchen insbesondere als Längen der *Tangentenabschnitte* von den Ecken A,B,C an den Inkreis und an die Ankreise auf:

Satz 1.4 (Inkreis). *Der Inkreis berühre die Seiten a,b,c des Dreiecks in den Punkten X,Y,Z. Dann gilt*

$$AY = AZ = s-a, \quad BZ = BX = s-b, \quad CX = CY = s-c.$$



Beweis. Die Tangentenabschnitte von den Ecken A,B,C an den Inkreis sind jeweils gleichlang, also $x = AY = AZ$, $y = BZ = BX$, $z = CX = CY$. Demnach ist

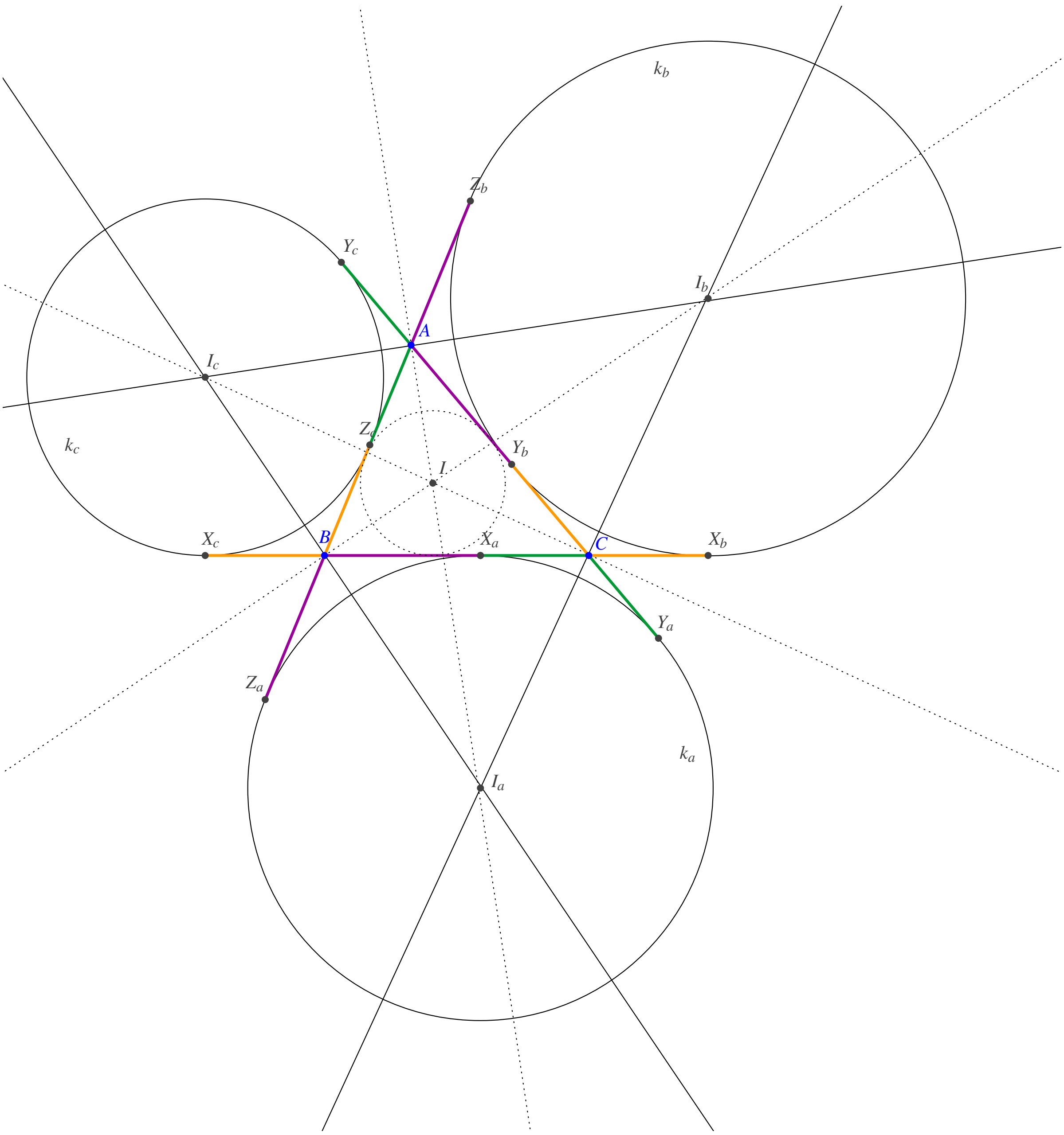
$$x+y=c, \quad x+z=b, \quad y+z=a$$

Addition der ersten beiden Gleichungen und Subtraktion der dritten ergibt

$$2x = (x+y)+(x+z)-(y+z) = c+b-a \Rightarrow x = \frac{c+b-a}{2} = s-a.$$

Analog folgt $y = s-b$ und $z = s-c$. $\square$

Satz 1.5 (Ankreise). *Die Tangentenabschnitte von A, B, C an den jeweils gegenüberliegenden Ankreis sind sämtlich gleichlang mit der Länge s.*



Beweis. Wir arbeiten mit den Bezeichnungen in der Figur. Es genügt $BX_b = BZ_b = s$ zu zeigen. Wir haben bereits $BX_b = BZ_b$ und ebenso sind die Abschnitte der Tangenten von A bzw. C an k_b gleich lang, das heißt $CX_b = CY_b$ und $AY_b = AZ_b$. Daraus folgt

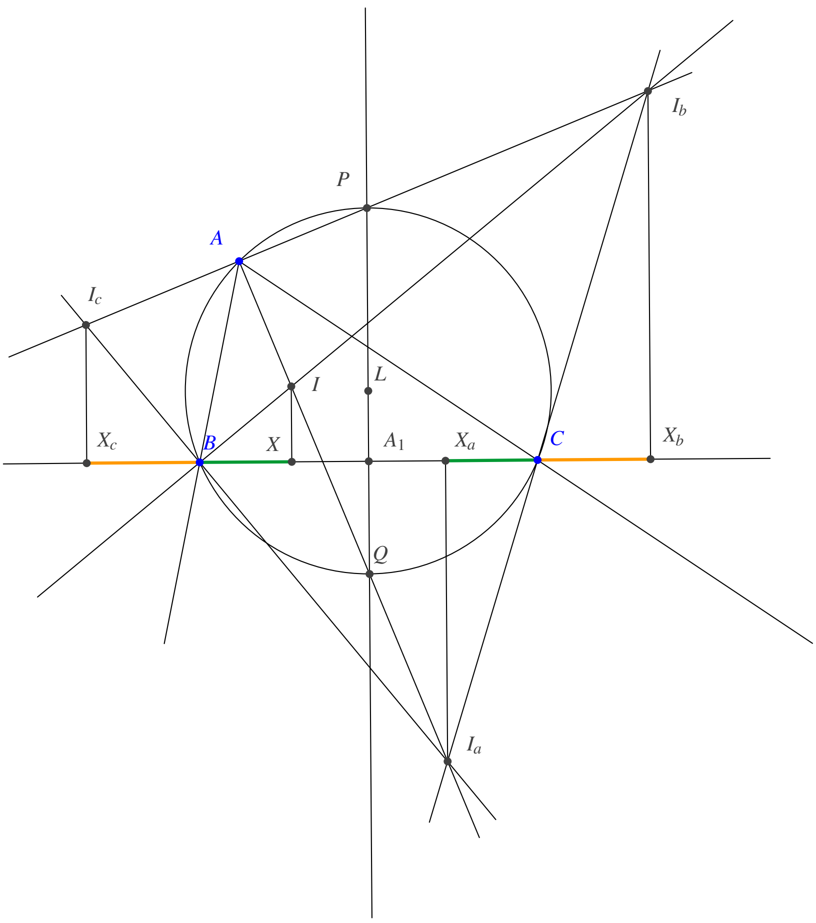
$$\begin{aligned} BX_b + BZ_b &= (a + CX_b) + (c + AZ_b) = a + CY_b + c + AY_b \\ &= a + b + c = 2s \end{aligned}$$

und daher $BX_b = BZ_b = s$. □

Mit Satz 1.5 können auch die Längen aller anderen Tangentenabschnitte an die Ankreise berechnet werden, vgl. hierzu die Einfärbungen, die mit denen aus Satz 1.4 korrespondieren.

Satz 1.6 (**Inkreis-Ankreis-Theorem**). *Die Berührpunkte von Ankreisen und Inkreis mit BC seien wieder X_a, X_b, X_c, X, es sei A_1 der Mittelpunkt von BC sowie k der Umkreis von ΔABC. Dann gilt:*

(i) AI schneidet den Umkreis im Mittelpunkt Q des Bogens BC. Auf I_bI_c liegen A und der Mittelpunkt P des Kreisbogens BC, der A enthält. Der Punkt O liegt auf PQ.
(ii) P ist Mittelpunkt von I_cI_b, A_1 ist Mittelpunkt von X_bX_c und $PA_1 = \frac{r_b+r_c}{2}$.
(iii) A_1 ist Mittelpunkt von XX_a, Q ist Mittelpunkt von II_a und $QA_1 = \frac{r_a-r}{2}$.
(iv) Für die fünf Radien gilt $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.



Beweis. (i) Wegen $\angle BAI = \frac{A}{2}$ ist der Schnittpunkt Q von AI mit dem Umkreis k auch der Mittelpunkt des Bogens BC. Andererseits gilt $AI_b \perp AI$, ist also P der zweite Schnittpunkt von AI_b mit k, so ist ΔAPQ rechtwinklig bei A und nach der Umkehrung des Satzes von Thales PQ ein Durchmesser von

k. Daher liegt O auf PQ und P muss Mittelpunkt des A enthaltenden Bogens BC sein.
(ii) Nach Satz 1.5 gilt $BX_c = CX_b = s-a$, daher ist A_1 Mittelpunkt von X_bX_c. Da PA_1 die Mittelsenkrechte der Seite BC ist, haben wir weiter $I_cX_c \| PA_1 \| I_bX_b$. Mit den Strahlensätzen folgt, dass P Mittelpunkt von I_bI_c ist und $PA_1 = \frac{r_b+r_c}{2}$ gilt.
(iii) Aus den Sätzen 1.4 und 1.5 wissen wir $BX = CX_a = s-b$, also ist A_1 auch Mittelpunkt von XX_a und der 2. Strahlensatz liefert dann $QA_1 = \frac{r_a-r}{2}$.
(iv) Nach Teil (i) gilt $2R = PQ = PA_1 + QA_1$ und Einsetzen der Formeln aus (ii), (iii) ergibt

$$2R = \frac{r_b+r_c}{2} + \frac{r_a-r}{2} \Rightarrow r_a+r_b+r_c = 4R+r.$$

□

Übung 4 (A 391044). *Das Dreieck ABC sei rechtwinklig bei A. Dann gilt $F = yz$.*

Beweis. Dies folgt aus $F = \frac{1}{2}bc$ und

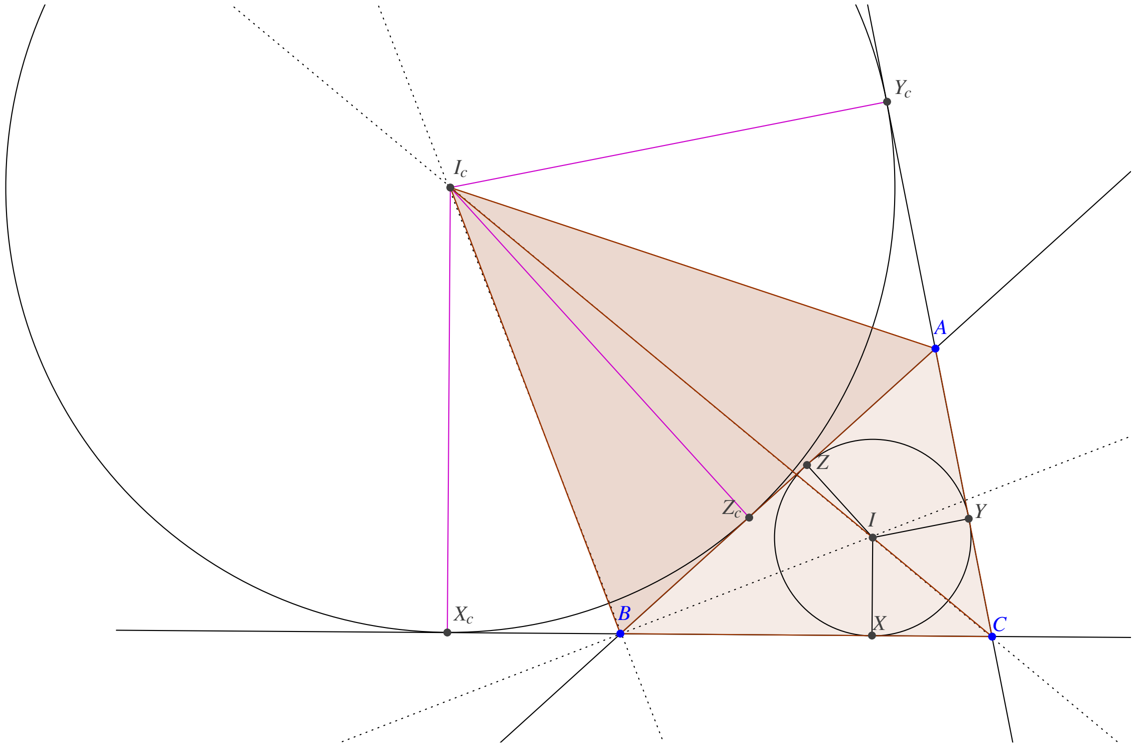
$$\begin{aligned} yz &= (s-b)(s-c) = \frac{1}{4}(a+c-b)(a+b-c) \\ &= \frac{1}{4}\left((a^2-(b-c)^2\right) = \frac{1}{4}\left(\underbrace{a^2-b^2-c^2}_{=0}+2bc\right) = \frac{1}{2}bc. \end{aligned}$$

□

3 Mehr über die Dreiecksfläche

Satz 1.7 (Flächenformel I).

$$F = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c).$$



Beweis. Betrachte die Zerlegung von ΔABC in die Dreiecke AIB, BIC, CIA. Diese haben die Seiten von ΔABC als Grundseiten und die zugehörigen Höhen sind sämtlich von der Länge r. Daraus folgt

$$F = \frac{1}{2}(ar+br+cr) = rs.$$

Auf ähnliche Weise bestimmen wir $F = [ABC]$ über

$$[ABC] = [BCI_c] + [CAI_c] - [ABI_c] = \frac{1}{2}(ar_c + br_c - cr_c) = r_c(s-c).$$

Analog werden die anderen Beziehungen gezeigt. □

Die Flächenformeln 1.7 bringen auch ein hübsches Zweigresultat zuwege:

Übung 5.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

Beweis.

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{s-a}{F}+\frac{s-b}{F}+\frac{s-c}{F}=\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{F}=\frac{s}{F}=\frac{1}{r}.$$

□

Bei der Deutschland-Olympiade wurde folgende räumliche Variante des vorigen Problems gestellt:

Übung 6 (A 441345). *Es seien r der Radius der Inkugel und r_1, r_2, r_3, r_4 die Radien der vier Ankugeln eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders $ABCD$. Man beweise, dass stets gilt*

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}.$$

Beweis. Wir verwenden die Abkürzungen $F_1=[ABC]$, $F_2=[ABD]$, $F_3=[ACD]$, $F_4=[BCD]$ für die Inhalte der Seitenflächen und $V=[ABCD]$ für das Tetraedervolumen. Es seien I und I_4 die Mittelpunkte der Inkugel und der die Seite BCD berührenden Ankugel. Dann kann $ABCD$ zerlegt werden in die Teiltetraeder $ABCI, ABDI, ACDI, BCDI$, also gilt

$$V=\frac{1}{3}r\cdot\sum_{i=1}^{4}F_i.$$

Der aus $ABCD$ und $BCDI_4$ zusammengesetzte Körper kann zerlegt werden in die drei Tetraeder $ABCI_4, ABDI_4, ACDI_4$, folglich gilt

$$[ABCD]=[ABCI_4]+[ABDI_4]+[ACDI_4]-[BCDI_4]$$

und daher

$$V=\frac{1}{3}r_4\cdot(F_1+F_2+F_3-F_4)=\frac{1}{3}r_4\cdot\left(-2F_4+\sum_{i=1}^{4}F_i\right).$$

Entsprechende Formeln gelten offenbar für die Radien r_1, r_2, r_3. Nun folgt

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i}=\frac{1}{3V}\cdot\sum_{i=1}^{4}\left(-2F_i+\sum_{j=1}^{4}F_j\right)=\frac{1}{3V}\cdot\ 2\sum_{i=1}^{4}F_i=\frac{2}{r},$$

was den Beweis abschließt. □

Satz 1.8 (Flächenformel II).

$$F=\frac{abc}{4R}.$$

Beweis. Der *Sinussatz* besagt $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, daher gilt $F=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{abc}{4R}$. □

Zum Abschluss unseres Kurses beweisen wir eine berühmte Ungleichung, die auf Leonhard Euler (1707-1783) zurückgeht.

Satz 1.9 (**Eulersche Ungleichung**).

$$R \geq 2r.$$

Bevor wir uns zu ihrem Beweis aufmachen, lernen wir noch eine bei Wettbewerben immer wieder nützliche Ungleichung kennen:

Lemma 1.2 (**AM-GM-Ungleichung**). *Für $a, b \geq 0$ gilt stets*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

mit Gleichheit genau für $a = b$.

Beweis. Setze $u = \sqrt{a}, v = \sqrt{b}$, dann ist die Ungleichung äquivalent zu

$$uv \leq \frac{u^2+v^2}{2} \Leftrightarrow 2uv \leq u^2+v^2 \Leftrightarrow 0 \leq (u-v)^2,$$

und das stimmt offenbar. Gleichheit haben wir genau für $u = v \Leftrightarrow a = b$. □

Aus der *AM-GM-Ungleichung* lassen sich weitere oft einsetzbare Ungleichungen herleiten. Zwei solche sind

Übung 7. *(i) Sei $x > 0$, dann gilt stets $x + \frac{1}{x} \geq 2$ mit Gleichheit genau bei $x = 1$.*
(ii) Seien $x, y, z > 0$, dann gilt stets

$$9 \leq (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

und Gleichheit tritt genau für $x = y = z$ ein.

Beweis. (i) Wähle $a = x, b = \frac{1}{x}$, dann erhalten wir mit Lemma 1.2:

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Gleichheit gilt genau für $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1$, wegen $x > 0$ also genau für $x = 1$.
(ii) Ausmultiplizieren der rechten Seite gibt die äquivalente Form:

$$9 \leq 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1$$
$$\Leftrightarrow 6 \leq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

und dies stimmt nach Anwendung von Teil (i) auf $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$. Für Gleichheit muss in allen drei Abschätzungen Gleichheit gelten, also $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$ sein. Andersherum tritt bei $x = y = z = 1$ auch Gleichheit ein. □

Beweis (von Satz 1.9). Wir multiplizieren die Formeln aus Satz 1.6 (iv) und aus der Übung 5 seitenweise miteinander. Das ergibt

$$(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=\frac{4R+r}{r}=\frac{4R}{r}+1.$$

Die linke Seite ist nach der eben gezeigten Ungleichung aber ≥ 9, und es folgt

$$9\leq\frac{4R}{r}+1\Longrightarrow 2r\leq R.$$

□

2 Transformationen

Im vorigen Kapitel haben wir die markanten Längen

$$x=s-a,\quad y=s-b,\quad z=s-c$$

betrachtet. Nach Satz 1.4 lassen sich a,b,c,s auch in Abhängigkeit von x,y,z ausdrücken:

$$a=y+z,\quad b=x+z,\quad c=x+y\quad \text{und zudem}\quad s=x+y+z.$$

Bei Ungleichungen über die Seiten eines Dreiecken ist diese sogenannte *Ravi-Substitution* nützlich, denn $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ sind genau dann die Seiten eines Dreiecks, wenn schlicht $x,y,z>0$ gilt.

Satz 2.1 (Radien). *Es gelten*

$$r=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}},\quad r_a=\sqrt{\frac{yz(x+y+z)}{x}}$$

mit entsprechenden Formeln für r_b,r_c und

$$R=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}.$$

Beweis. Die Heron-Formel liest sich als

$$F^2=xyz(x+y+z)\Rightarrow F=\sqrt{xyz(x+y+z)}. \tag{1}$$

Nach den Flächenformeln 1.7 und 1.8 gilt ferner

$$F=rs=r(x+y+z),\quad F=r_a(s-a)=r_ax$$

sowie

$$F=\frac{abc}{4R}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4R}.$$

Einsetzen von (1) in die Flächenformeln liefert das Gewünschte. □

Wir betrachten die *elementarsymmetrischen Polynome* in a,b,c , nämlich

$$\sigma_1(a,b,c) = a+b+c, \quad \sigma_2(a,b,c) = ab+bc+ca, \quad \sigma_3(a,b,c) = abc$$

Sowohl diese drei als auch die Polynome in x,y,z und in r_a,r_b,r_c wollen wir nachfolgend durch Terme in R,r,s beschreiben. Wir benutzen ab sofort auch zyklische Summenschreibweise, z.B.

$$\sum_{\text{cyc}} r_a = r_a + r_b + r_c$$

und schreiben kurz $\sum r_a$, falls keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Satz 2.2. *Es gelten folgende Identitäten:*

	σ_1	σ_2	σ_3
a,b,c	$2s$	$4Rr+r^2+s^2$	$4Rrs$
x,y,z	s	$4Rr+r^2$	r^2s
r_a,r_b,r_c	$4R+r$	s^2	rs^2

Beweis. Wir starten mit r_a,r_b,r_c. Nach Satz 1.6 (iv) gilt $\sum r_a = 4R+r$. Mit Satz 2.1 ist weiter

$$\begin{aligned}\sum r_a r_b &= \sum \sqrt{\frac{yz(x+y+z)}{x} \cdot \frac{zx(x+y+z)}{y}} = \sum z(x+y+z) \\ &= (x+y+z)^2 = s^2\end{aligned}$$

Zusammen mit Übung 5 ergibt dies

$$\frac{1}{r} = \sum \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_a r_b r_c} \sum r_a r_b = \frac{s^2}{r_a r_b r_c} \Rightarrow r_a r_b r_c = rs^2.$$

Wir beobachten als nächstes

$$rr_a = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z} \cdot \frac{yz(x+y+z)}{x}} = yz$$

und damit

$$\sum xy = \sum rr_a = r(4R+r) = 4Rr+r^2.$$

Außerdem ist $\sum x = s$ und nach der Heron-Formel

$$(rs)^2 = F^2 = xyz(x+y+z) = xyzs \Rightarrow xyz = r^2 s.$$

Nun die Polynome in a,b,c: Wir haben $\sum a = 2s$ und gemäß Flächenformeln

$$abc = 4RA = 4Rrs.$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}\sum ab &= \sum (y+z)(x+z) = \sum xy + \sum z(x+y+z) \\ &= \sum xy + s^2 = 4Rr + r^2 + s^2,\end{aligned}$$

womit alles gezeigt ist. □

3 Klassische Ungleichungen

Als Anwendung der Ravi-Substitution beweisen wir die Euler-Ungleichung erneut:

Beweis (Euler 2). Satz 2.1 liefert, wobei $x,y,z>0$,

$$\begin{aligned}\frac{R}{r} &= \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}\cdot\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz}\\ &= 2\cdot\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{y+z}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{z+x}{2\sqrt{zx}}\geq 2\end{aligned}$$

nach der AM-GM-Ungleichung. Gleichheit tritt genau für $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$ ein. □

Im folgenden seien h_a, h_b, h_c die Längen der Höhen von ΔABC. Auf IMOmath wird folgende Ungleichungskette bewiesen:

Satz 3.1.

$$9r \leq h_a+h_b+h_c \leq l_a+l_b+l_c \leq \sqrt{r_ar_b}+\sqrt{r_br_c}+\sqrt{r_cr_a} \leq s\sqrt{3} \leq r_a+r_b+r_c = 4R+r. \quad (2)$$

Beweis. (i) Wir beginnen mit $2F = \frac{1}{3}(ah_a+bh_b+ch_c)$ und wenden die Tschebyscheff-Ungleichung an:

$$r(a+b+c) = 2F \leq \frac{1}{9}(a+b+c)(h_a+h_b+h_c) \Rightarrow 9r \leq h_a+h_b+h_c$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a=b=c$ ist.
(ii) folgt durch Addition der offenkundigen Ungleichungen $h_a \leq l_a$, $h_b \leq l_b$, $h_c \leq l_c$.
(iii) Mit Übung 3 (ii) ergibt sich

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)} \leq \sqrt{s(s-a)} = \sqrt{r_br_c},$$

die letzte Gleichheit gilt gemäß Beweis von Satz 2.2. Summation beweist die 3. Ungleichung.
(iv), (v) Für $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichungskette $xy+yz+zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \leq x^2+y^2+z^2$. Die rechte dieser Ungleichungen führt auf

$$\sqrt{r_ar_b}+\sqrt{r_br_c}+\sqrt{r_cr_a} \leq 3(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a) = 3s^2,$$

was die 4. Ungleichung in (2) zeigt. Die linke Ungleichung führt auf

$$3(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a) \leq (r_a+r_b+r_c)^2$$

und zusammen mit Satz 2.2 als auch dem *Inkreis-Ankreis-Theorem* (iv) folgt

$$3s^2 \leq (4R+r)^2 \Rightarrow s\sqrt{3} \leq 4R+r.$$

□

Bemerkung. Aus Obigem folgt sofort $9r \leq 4R + r \Rightarrow 2r \leq R$, also erneut die *Euler-Ungleichung*.

Mit den Identitäten aus Kapitel 2 können auch zahlreiche weitere Ungleichungen gebastelt werden. Ein Beispiel ist folgende:

Satz 3.2.

$$\sum a(s-a) \leq 9Rr.$$

Beweis (nach Russelle Guadalupe). Es gilt $\sum a^2 = (\sum a)^2 - 2\sum ab = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr$ gemäß Satz 2.2 und folglich

$$\sum a(s-a) = \sum (as - a^2) = 2s^2 - \sum a^2 = 2s^2 - (2s^2 - 2r^2 - 8Rr) = 8Rr + 2r^2.$$

Die Ungleichung ist also äquivalent zu

$$8Rr + 2r^2 \leq 9Rr \Leftrightarrow 2r^2 \leq 2Rr \Leftrightarrow 2r \leq R$$

und letzteres ist die *Eulersche Ungleichung*. □

Satz 3.3 (Hadwiger-Finsler-Ungleichung, 1937).

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}F + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Beweis. Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$2\sum ab - \sum a^2 \geq 4\sqrt{3}F.$$

Aber $\sum a^2 = (\sum a)^2 - 2\sum ab$, mit Satz 2.2 folgt also

$$2\sum ab - \sum a^2 = 4\sum ab - (\sum a)^2 = 4(4Rr + r^2 + s^2) - 4s^2 = 4r(4R + r).$$

Ferner ist $F = rs$ und wir erhalten die äquivalente Form

$$4R + r \geq \sqrt{3}s,$$

was der 5. Ungleichung in Satz 3.1 entspricht. □