Doppeltes Abzählen und das Prinzip Inklusion Exklusion

Tobias Strauß

30. Oktober 2010

1 Vorbereitungen

Zuerst wollen wir einige Zählmethoden bereitstellen, die wir später brauchen. Die mathematischen Begriffe dazu lauten *Permutation*, *Variation* und *Kombination*.

Beispiel 1. Wir ziehen aus einer Urne mit n durchnummerierten Kugeln. Die gezogenen Kugeln legen wir nacheinander auf n Plätze. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? (alternative Interpretationen: An einem Rennen nehmen n Läufer teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es für unterschiedliche Zieleinläufe? Außerdem: Hier ist die Reihenfolge wichtig!)

Betrachten wir die erste Stelle. Auf der ersten Stelle können n Kugeln liegen. Betrachten wir die zweite Stelle. Wir haben bereits eine Kugel gewählt. Also bleiben für die zweite Stelle $n-1$ Kugeln übrig, unabhängig von der Wahl der ersten Stelle. Wir haben also bereits $n \cdot (n-1)$ Möglichkeiten für die ersten beiden Stellen. Für die dritte Stelle bleiben nun wieder $n-2$ Möglichkeiten, da wir ja bereits 2 Kugeln gewählt haben. Für jede Wahl der ersten zwei Stellen bekommen also wir $n-2$ Möglichkeiten, also insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ für die ersten drei Stellen und so weiter.

All in all erhalten wir als Lösung

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2$$

(sprich n Fakultät) Möglichkeiten. Der mathematische Fachbegriff lautet *Permutation*.

Beispiel 2. Wir ziehen aus einer Urne mit n durchnummerierten Kugeln. Gezogen werden $k < n$ Kugeln, die wir nacheinander auf k Plätze legen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? (alternative Interpretationen: An einem Rennen nehmen n Läufer teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die ersten k Plätze? Außerdem: Hier ist die Reihenfolge wichtig!)

Betrachten wir die erste Stelle. Auf der ersten Stelle können n Kugeln liegen. Betrachten wir die zweite Stelle. Wir haben bereits eine Kugel gewählt. Also bleiben für die zweite Stelle $n-1$ Kugeln übrig, unabhängig von der Wahl der ersten Stelle. Wir haben also bereits $n \cdot (n-1)$ Möglichkeiten für die ersten beiden Stellen. Für die dritte Stelle bleiben nun wieder $n-2$ Möglichkeiten, da wir ja bereits 2 Kugeln gewählt haben. Für jede Wahl der ersten zwei Stellen bekommen also wir $n-2$ Möglichkeiten, also insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ für die ersten drei Stellen und so weiter.

All in all erhalten wir als Lösung

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdots 3 \cdot 2} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)$$

Möglichkeiten. Der mathematische Fachbegriff lautet *Variation* (ohne Wiederholung).

Beispiel 3. Wir ziehen aus einer Urne mit n durchnummerierten Kugeln. Gezogen werden k Kugeln, die wir nacheinander in eine zweite Urne legen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? (alternative Interpretationen: An einem Rennen nehmen n Läufer teil. Auf dem Sieger-Foto werden die ersten k-Läufer abgebildet, ohne dass ihr Platz zu erkennen ist. Wie viele unterschiedliche, d.h. mit verschieden Personen, Sieger-Fotos sind möglich? Außerdem: Hier ist die Reihenfolge unwichtig!)

Aus dem letzten Beispiel wissen wir, dass es $\frac{n!}{k!}$ Möglichkeiten gibt, k Kugeln aus der aus der Urne zu ziehen. Nun ist aber die Ziehung $1, 2, 3$ nicht von $3, 2, 1$ zu unterscheiden. Wir müssen also noch diejenigen Möglichkeiten rausschmeißen, die identisch sind. Nehmen wir also an, wir haben k Kugeln gezogen. Ziehen wir diese k Kugeln in einem neuen Experiment in einer anderen Reihenfolge erneut, so dieser Ausgang nicht von unserem ersten Experiment zu unterscheiden. Wir müssen also durch die Anzahl dieser Möglichkeiten dividieren. Wie groß die Anzahl dieser Möglichkeiten ist wissen wir aber bereits durch das erste Beispiel. Die Anzahl k Kugel auf k Plätze zu legen ist $k!$.

All in all erhalten wir als Lösung

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 3 \cdot 2} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Möglichkeiten. Der mathematische Fachbegriff lautet *Kombiniation* (ohne Wiederholung).

Beispiel 4. Wir ziehen aus einer Urne mit n durchnummerierten Kugeln. Gezogen werden k Kugeln. Wir notieren ihre Nummer, und legen sie wieder zurück. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? (alternative Interpretationen: An k aufeinander folgenden Tagen findet täglich ein Rennen mit n Läufer statt. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die k Sieger dieser Rennen? Außerdem: Hier ist die Reihenfolge wichtig!)

Für die erste Kugel haben wir n Möglichkeiten, genauso für die zweite Kugel und so weiter.

All in all erhalten wir als Lösung

$$n^k$$

Möglichkeiten. Der mathematische Fachbegriff lautet *Variation* (mit Wiederholung).

Aufgabe 1. *Wie viele Möglichkeiten gibt es n verschiedene Hüte auf n Haken zu platzieren?*

Lösung. Hier handelt es sich offenbar um eine Permutation, da die Reihenfolge wichtig ist, und n Hüte umsortiert werden. Also gibt es $n!$ Möglichkeiten. □

Aufgabe 2. *Sei $\mathcal{A}$ ein Alphabet mit a Buchstaben. Wie viele Möglichkeiten gibt es „Wörter“ (gemeint ist hier Aneinanderreihungen von Buchstaben, ohne auf den Sinn zu achten) der Länge p zu bilden?*

Lösung. Die Reihenfolge ist wichtig, also Variation. Die Möglichkeiten für Buchstaben werden von Stelle zu Stelle nicht weniger, also mit Wiederholung. Es sind a^p Möglichkeiten. □

Aufgabe 3. *Wie viele Möglichkeiten gibt es s Mathebücher auf n Schüler zu verteilen?*
(Hinweis: Möglich ist auch, dass einer alle Bücher bekommt oder ein Schüler kein Buch.)

Lösung. Für das erste Buch haben wir n verschiedene Abnehmer, genauso für das zweite usw. Also haben wir n^s verschiedene Möglichkeiten. □

2 Doppeltes Abzählen

Beispiel 5. In einer Vorlesung sitzen 64 Studenten und n Studentinnen. Jeder Student kennt genau 5 Studentinnen und jede Studentin 8 Studenten. Wie viele Studentinnen haben wir, wenn wir voraussetzen, dass bekannt sein symmetrisch ist?

Wir zählen die Bekanntschaftsbeziehungen zwischen den Studenten. Jeder Student kennt genau 5 Studentinnen. Dadurch ergeben sich 320 Bekanntschaften. Auf der anderen Seite haben wir aber n Studentinnen, die jeweils 8 Studenten kennen. Also

$$5 \cdot 64 = 320 = 8 \cdot n \quad \Rightarrow \quad n = 40.$$

Wir haben die Anzahl der Bekanntschaften also doppelt abgezählt. Dies führt uns auf folgendes Prinzip:

Prinzip des doppelten Abzählens: Angenommen wir haben zwei endliche Mengen R und C gegeben und eine Teilmenge S des Kreuzprodukts $R \times C$. Wann immer $(p,q) \in S$ ist, dann sagen wir, dass p und q inzident sind.
Wenn wir mit r_p die Anzahl der Elemente bezeichnen, die zu $p \in R$ inzident sind, und c_q die Anzahl der Elemente, die zu $q \in C$ inzident sind, so gilt

$$\sum_{p \in R} r_p = |S| = \sum_{q \in C} c_q.$$

Versuchen wir die Definition auf obiges Beispiel anzuwenden: Die Studenten bezeichnen wir mit m, Studentinnen mit w. Die Menge R ist offensichtlich die Menge der Studenten und C die der Studentinnen (oder umgekehrt). Die Menge der Bekanntheitsbeziehungen ist

$$S := \{(m,w) \mid m \in R, w \in C,\ m \text{ und } w \text{ kennen sich}\}.$$

Wie oben definieren wir $r_m := |\{(m,w) \mid w \in C\}|$ und $c_w := |\{(m,w) \mid m \in R\}|$. Nach dem Prinzip des doppelten Abzählens gilt

$$5 \cdot 64 = \sum_{m \in R} r_m = \sum_{w \in C} c_w = 5 \cdot n.$$

Man sollte die obige Definition jedoch nicht zu sklavisch anwenden. Oft ist es sehr schwierig eine geeignete Menge S zu finden, so dass meist eine intuitive Definition von doppeltem Abzählen benutzt wird: „Zähle die gleiche Menge doppelt ab.“

Aufgabe 4. *Auf einem Karte sind n Orte untereinander verbunden. Eine Straße verbindet je zwei Orte. Die Anzahl der Straßen, die Start- bzw. Endpunkt eines bestimmten Ortes o sind, bezeichnen wir mit $s(o)$. Die Anzahl aller Orte sei $\mathcal{O}$. Bestimme die Anzahl $\mathcal{S}$ aller Straßen der Karte.*

Lösung. Jede Straße verbindet genau zwei Orte. D.h.

$$\sum_{o \in \mathcal{O}}^{n} s(o) = 2|\mathcal{S}|.$$

Also

$$|\mathcal{S}| = \frac{1}{2} \sum_{o \in \mathcal{O}}^{n} s(o).$$

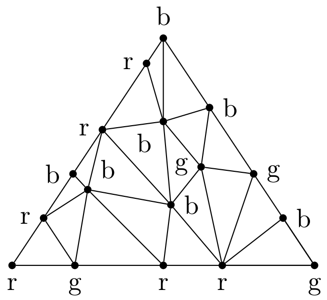
□

Die obige Aufgabe ist wohl die bekanntest Aufgabe zum doppelten Abzählen. Zwar werden meist die Straßen durch Kanten und die Orte durch Knoten ersetzt, so dass man von Graphen spricht, das Prinzip bleibt jedoch gleich. In der Graphentheorie spricht man auch vom „Handshake-Lemma“.

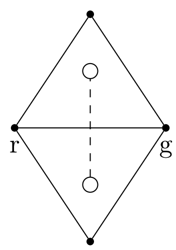
Aufgabe 5. *Angenommen, ein „großes“ Dreieck mit Ecken G, B, R wird trianguliert, also in eine endliche Zahl von „kleinen“ Dreiecken zerlegt, die Kante an Kante zusammenstoßen.*

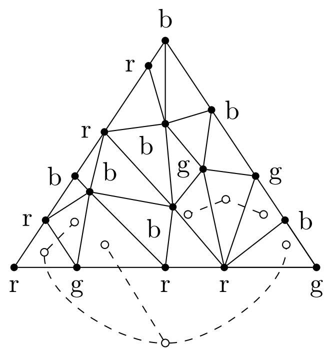
Weiterhin nehmen wir an, dass die Ecken der Triangulierung „Farben“ aus der Menge $\{g, b, r\}$ (rot, blau, grün) erhalten, so dass X jeweils die Farbe x erhält, und für die Ecken entlang der Kante von X nach Y nur die Farben x und y benutzt werden, während wir im Inneren keine Einschränkungen machen: die inneren Ecken können beliebig mit g, b oder r gefärbt werden.

Dann muss es in der Triangulierung stets ein kleines „3-gefärbtes“ Dreieck geben, dessen Ecken mit den drei verschiedenen Farben gefärbt sind.



Lösung. Wir zeigen sogar, dass die Anzahl der bunten Dreiecke, d.h. je eine Ecke ist r, g bzw. b, ist ungerade. Dazu benötigen wir den dualen Graphen. In jedes Dreieck sowie in das Äußere des Graphen zeichnen wir einen Knoten. Zwei Knoten verbinden wir genau dann, wenn diese durch eine Kante getrennt sind, die jeweils einen r und einen g Endknoten besitzt.





Schauen wir uns an, welchen Grad die Knoten haben. Sind alle Eckpunkte des umgebenen Dreiecks einfarbig, so hat der Knoten Grad 0, da es keine rg-Kante gibt. Hat das Dreieck zwei r-Ecken und eine g-Ecke (oder umgekehrt), so gibt es zwei rg Kanten und der innere Knoten hat Grad 2. In einem bunten Dreieck hat der innere Knoten Grad 1. In allen anderen Fällen hat der innere Knoten Grad 0.

Der Knoten außerhalb des Graphen hat ungeraden Grad. Das sieht man so: Wir schauen auf die gesamte Strecke zwischen R und G. Stellen wir uns vor wir würden sukzessive r und g Knoten in diese Strecke einfügen. Anfangs ist der rote Konten R mit dem grünen Knoten G verbunden. Die Anzahl der rot-grünen Abschnitte ist 1, also ungerade. Jetzt gibt es verschiedene Fälle:

- Wir fügen einen r Knoten zwischen zwei g ein oder zwischen zwei rote Knoten setzen wir einen grünen. In beiden Fällen entstehen zwei neue rg-Abschnitte.
- Wir fügen eine rote oder grüne Ecke zwischen eine rote und eine grüne Ecke. Hier bleibt die Anzahl der rot-grünen Abschnitte gleich.
- Alle betrachteten Ecken sind gleichfarbig rrr oder ggg. Auch hier ändert sich die Anzahl der rg-Strecken nicht.

Also erhöhen wir die Anzahl der rg-Strecken in jedem Schritt um zwei oder sie bleibt gleich. Auf jeden Fall bleibt sie aber ungerade und damit auch der Grad des äußeren Knotens.

Erinnern wir uns an die vorherige Aufgabe. Ein Graph verhält sich ähnlich wie ein Straßennetz. Auch in einem Graphen ist die Summe der Grade der Knoten eines Graphen gerade, da

$$2|E| = \sum_{v \in \mathcal{V}} \delta(v).$$

Jetzt zählen wir die Kanten im dualen Graphen modulo 2. Mit anderen Worten uns interessiert nur, ob die Anzahl gerade oder ungerade ist. Der äußere Knoten hat ungeraden Grad, nach dem Handshake-Lemma muss der Grad der inneren Knoten auch ungerade sein. Wir haben aber gesehen, dass nur dann innere Knoten mit ungeradem Grad auftreten, wenn sie in einem bunten Dreieck liegen. Es gibt also eine ungerade Anzahl von bunten Dreiecken. □

Aufgabe 6 (der kleine Fermat)**.** *Sei $a \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Dann gilt*

$$a^p \equiv a \mod p$$

oder anders ausgedrückt: $a^p - a$ ist durch p teilbar.

Lösung. Wir wählen ein Alphabet $\mathfrak{A}$ mit a verschiedenen Symbolen und bilden „Wörter" der Länge p (d.h., wir reihen p Symbole aus $\mathfrak{A}$ hintereinander). Im Falle von $a = 2$ und $p = 5$ könnte ein Alphabet z.B. $\mathfrak{A} := \{A, B\}$ sein. Wörter wären dann beispielsweise $AABAA$ oder auch $BBBBB$.

Die Anzahl aller möglichen Wörter ist offenbar a^p, da wir für jede der p Stellen des Wortes a verschiedene Symbole nutzen können.

Wir *drehen* ein Wort, indem wir den letzten Buchstaben abschneiden und vor die erste Stelle kleben. In unserem Beispiel drehen wir $AABAA$ zu $AAABA$. Zwei Wörter, die durch mehrmaliges Drehen in einander überführbar sind, nennen wir *befreundet*. So sind

$$AABAA,\ AAABA,\ AAAAB,\ BAAAA,\ ABAAA$$

befreundete Wörter, die durch $0, 1, 2, 3, 4$-maliges drehen aus $AABAA$ entstehen. Offenbar sind das auch die einzigen Freunde von $AABAA$, denn dreht man $ABAAA$ ein weiteres mal, so erhält man wieder $AABAA$. Der Einfachheit halber sagen wir, dass ein Wort auch mit sich selbst befreundet ist.

Wie viele Freunde kann ein Wort haben? Offenbar hat ein Worte, dass nur aus einem Symbol besteht (z.B. $BBBBB$) nur einen Freund. Davon gibt es a verschiedene, denn wir haben a-Symbole im Alphabet.

Jedes andere Wort hat aber p verschiedene Freunde. Das sieht man so: Nach p maligem Drehen ist das Wort wieder an seinem Ausgangspunkt. Also kann es höchstens weniger Freunde geben. Wir haben aber mindestens zwei verschiedene Symbole in unserem Wort. Um durch r-maliges Drehen mit $r < p$ das ursprüngliche Wort zu erhalten, muss es aus $p > n > 1$ Kopien eines kleineren Wortes bestehen. Mit anderen Worten $n \cdot r = p$. Dann wäre p aber keine Primzahl. Also hat jedes Wort mit wenigstens zwei Symbolen p Freunde.

Hier sind alle Freunde aus unserem Beispiel

$$\begin{aligned}
&AAAAB, AAABA, AABAA, ABAAA, BAAAA\\
&AAABB, AABBA, ABBAA, BBAAA, BAAAB\\
&AABAB, ABABA, BABAA, ABAAB, BAABA\\
&AABBB, ABBBA, BBBAA, BBAAB, BAABB\\
&ABABB, BABBA, ABBAB, BBABA, BABAB\\
&ABBBB, BBBBA, BBBAB, BBABB, BABBB\\
&AAAAA\\
&BBBBB
\end{aligned}$$

Jetzt zählen wir alle Freunde doppelt ab, die aus mehr als einem Symbol bestehen. Nach obiger Argumentation hat jedes solches Wort p Freunde. Sei N die Anzahl der Gruppen solcher Freunde, dann ist

$$\text{Anzahl der Freunde} = N \cdot p.$$

Auf der anderen Seite ist die Anzahl solcher Freunde

$$\text{Anzahl der Freunde} = a^p - a,$$

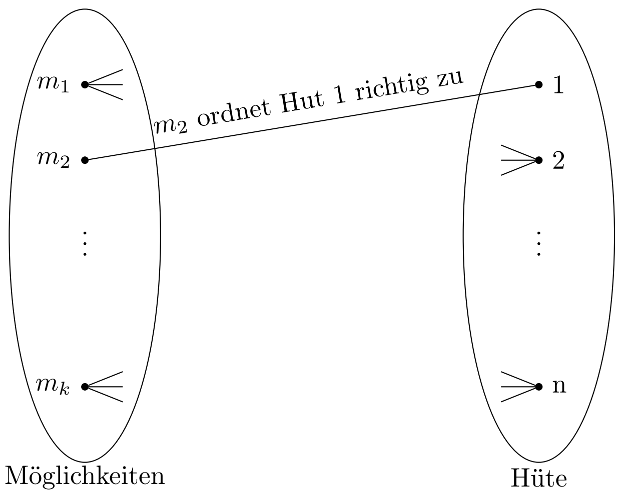
also alle Wörter ohne diejenigen, die nur ein einzelnes Symbol enthalten. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt der Beweis. $\square$

Aufgabe 7. *In der Garderobe eines Theaters fällt dummerweise der Kleiderständer um. Jacken und Taschen bleiben an Ort und Stelle, nur die n Hüte fliegen wild durch die Gegend, so dass ihr ursprünglicher Platz nicht mehr feststellbar ist. Wie viele Hüte gelangen durchschnittlich an ihren richtigen Platz, wenn sie zufällig zurück gehängt werden.*

Lösung. Sei M die Menge aller möglichen Anordnungen der Hüte nach dem Sturz. Gesucht ist dann

$$\frac{1}{|M|} \sum_{m \in M} |\{i \mid \text{Hut } i \text{ ist bei } m \text{ an der richtigen Stelle}\}|.$$

Dazu stellen wir uns den folgenden Graphen vor. Auf der linken Seite symbolisiert jeder Knoten ein Element $m \in M$ auf der rechten Seite steht jeder Knoten für einen Hut. Wenn der Hut i unter m fest bleibt, d.h. er kehrt an seinen richtigen Platz zurück, dann ziehen wir zwischen i und m eine Kante.



Jetzt zählen wir die Kanten, die auf der linken Seite ankommen und die Kanten, die auf der rechten Seite ankommen. Beide Anzahlen müssen offenbar gleich sein. (Wir summieren also über den Grad der Knoten auf beiden Seiten.) Rechts ergibt sich

$$\text{Anzahl der Kanten auf der rechten Seite} = \sum_{m \in M} \{i \mid \text{Hut } i \text{ ist bei } m \text{ an der richtigen Stelle}\}.$$

Dies ist der einfache Teil. Links müssen wir uns zuerst überlegen, wie groß M eigentlich ist. Wir heben den ersten Hut auf und hängen ihn an einen der n Plätze, an denen vorher ein Hut war. Wir haben also n Möglichkeiten. Für den zweiten Hut haben wir aber nun nur noch $n-1$ verschiedene Möglichkeiten, denn ein Platz ist ja schon (durch den ersten Hut) belegt. Dieses Argument können wir fortführen, so dass wir insgesamt

$$|M| := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n! \tag{1}$$

erhalten. Nun sind mit Hut i aber nur diejenigen ms verbunden, bei denen Hut i an der richtigen Stelle sitzt. D.h. eine Stelle ist bereits belegt und wir haben nur noch $(n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = (n-1)!$ Möglichkeiten für die restlichen Hüte. Dies ist unabhängig von i. Also gilt

$$\text{Anzahl der Kanten auf der linken Seite} = \sum_{i=1}^{n} (n-1)!.$$

Jetzt fällt auf, dass wir n mal $(n-1)!$ aufsummieren. Dies ist aber gleich $n!$. Wir setzen nun die linke und die rechte Seite gleich und erhalten:

$$\sum_{m \in M} |\{i \mid \text{Hut } i \text{ ist bei } m \text{ an der richtigen Stelle}\}| = n!.$$

Wir teilen durch $|M| = n!$ (nach (1)).

$$\frac{1}{|M|} \sum_{m \in M} |\{i \mid \text{Hut } i \text{ ist bei } m \text{ an der richtigen Stelle}\}| = 1$$

Im Schnitt hängt also nur ein Hut wieder an der richtigen Stelle. □

Aufgabe 8. *Von den Eckpunkten eines regelmäßigen* 250*-Ecks wurden genau 16* gelb *und alle anderen* blau *gefärbt. Beweisen Sie, dass es zu jeder solchen Färbung eine Drehung des 250-Ecks um seinen Mittelpunkt gibt, bei der alle gelben Ecken in blaue übergehen.*

Lösung. Mit D_j bezeichnen wir die Drehung $i \mapsto i + j - 1 \pmod{250} + 1$.

$$\{D_1, \ldots, D_{249}\} := \text{ Menge aller sinnvollen Drehungen ohne } id$$

$$\{P_1, \ldots, P_{16}\} := \text{ Menge der gelben Eckpunkte}$$

Wir konstruieren einen bipartiten Graph mit den Ecken $V := \{D_1, \ldots, D_{249}, P_1, \ldots, P_{16}\}$ und Kanten $(D_i, P_j) \in E$ g.d.w. P_j gelb unter Drehung D_i bleibt. Offenbar kommen an jedem Punkt P_j 15 Kanten an, da es 15 Drehungen gibt, die P_j wieder auf eine der 15 weiteren gelben Positionen dreht.

Wir zählen die Paare (D_i, P_j) doppelt ab.

$$\sum_{i=1}^{249} \delta(D_i) = \sum_{i=1}^{16} \delta(P_j) = 16 \cdot 15 = 240 < 249$$

Also existiert eine Drehung D_i mit $\delta(D_i) = 0$. Nach Definition des Graphen rücken alle Punkte P_j auf blaue Positionen. □

Aufgabe 9. *Wie viele bezeichnende Bäume auf* n *Knotenpunkten gibt es?*

Lösung. Vorbereitung: wir definieren zunächst den Begriff des *Wurzelwaldes*. Der Wurzelwald ist ein Wald zusammen mit einer Wurzel in jedem Baum. Der Wurzelwald besteht aus mindestens einem Wurzelbaum. Die Menge aller Wurzelbäume auf n Knoten und k Komponenten sei $\mathcal{F}_{n,k}$. Für $k = 1$ existiert nur eine Komponente und daher beschreibt $\mathcal{F}_{n,1}$ die Menge aller Wurzelbäume.

Jeder bezeichnende Baum steht für n Wurzelbäume, denn an solch einem Baum kann jeder Knoten als Wurzel identifiziert werden. Wenn T_n die Anzahl der bezeichnenden Bäume beschreibt, so gilt $nT_n = |\mathcal{F}_{n,1}|$.

Nun betrachten wir $F_{n,k} \in \mathcal{F}_{n,k}$ als einen *gerichteten Graphen*, in dem alle Kanten von der Wurzel wegzeigen. Wir sagen der Wald F enthält einen anderen Wald F', falls F' Untergraph von F im Sinne von gerichteten Graphen ist. Offenbar besitzt F dann weniger Komponenten aber mehr Kanten als F'. Unten sind Beispiele für F und F' angegeben, die Wurzel ist jeweils eingekreist.

Sei $F_1, ..., F_k$ eine Folge von Wäldern, wobei jeweils $F_i \in \mathcal{F}_{n,i}$. Solch eine Folge heißt dann *verfeinernde Kette*, falls sich die Wälder gegenseitig enthalten, also

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_k.$$

F_1 ist dann ein Baum. Die weiteren Folgenelemente entstehen durch weglassen von Kanten.
Wir fixieren jetzt F_k aus $\mathcal{F}_{n,k}$ und bezeichnen

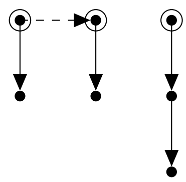
- mit $N(F_k)$ die Anzahl der Wurzelbäume, die F_k enthalten und
- mit $N^*(F_k)$ die Anzahl der verfeinernden Ketten, die in F_k enden.

Nun zählen wir $N^*(F_k)$ auf zwei verschiedene Weisen ab. Einmal beginnen wir bei F_1 und später bei F_k.

1. Methode Zuerst stellen wir uns einen Baum $F_1 \in \mathcal{F}_{1,n}$ vor, der F_k enthält. Die $k-1$ Kanten die F_1 von F_k unterscheiden, können wir auf beliebige Weise entfernen. Jedes mal entsteht eine andere verfeinernde Kette. Nun gilt also

$$N^*(F_k) = N(F_k)(k-1)!. \tag{2}$$

2. Methode Wir beginnen nun bei einem F_k und, zählen wie viele Möglichkeiten es gibt, einen Wurzelbaum, also ein F_1, zu erhalten. Um aus F_k ein F_{k-1} zu konstruieren, muss von einem beliebigen Knoten a des Waldes (n Stück) eine (gerichtete) Verbindung zu einer Wurzel eines anderen Baumes ($k-1$ verschiedene) gezogen werden.



Wir haben also gesehen, dass es $n(k-1)$ Möglichkeiten gibt aus F_k einen Wurzelwald mit $k-1$ Komponenten zu konstruieren. Analog gibt es $n(k-2)$ Möglichkeiten von F_{k-1} zu F_{k-2} zu gelangen usw. Wir erhalten als Anzahl der verfeinernden Ketten

$$N^*(F_k) = n^{k-1}(k-1)!. \tag{3}$$

Wir setzen (2) und (3) gleich und erhalten als Anzahl der Wurzelbäume, die F_k enthalten

$$N(F_k) = n^{k-1} \quad \text{für } \textit{jedes } F_k \in \mathcal{F}_{n,k}.$$

Jetzt überlegen wir uns, was eigentlich $N(F_n)$ bedeutet. F_n besitzt lediglich isolierte Knoten und keine Kanten. Dieser entartete Wurzelwald ist offenbar in jedem Wurzelbaum enthalten, also ist $N(F_n)$ die Anzahl aller möglichen Wurzelbäume. Mit $nT_n = |\mathcal{F}_{n,1}| = n^{k-1}$ folgt jetzt Cayleys Formel. $\square$

3 Prinzip von Inklusion - Exklusion

Prinzip von Inklusion - Exklusion: Für $i \in \{1,\ldots,n\}$ seien $A_i \subseteq S$ Mengen. Dann gilt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

beziehungsweise oft wird auch das Gegenteil benutzt

$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Falls oben $I = \emptyset$, so definieren wir $\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = S$

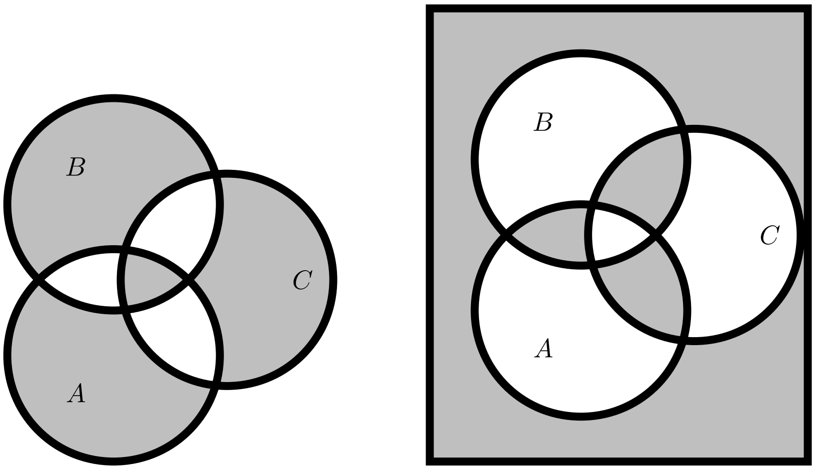
Was heißt das genau? Nehmen wir an, wir haben 3 Mengen A, B und C und wir möchten wissen, wie viele Elemente in der Vereinigung der drei Mengen liegen, kennen aber nur den Schnitt von von je zwei bzw. aller drei Mengen. Dann ist

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Falls $A, B, C \subseteq S$ so gilt

$$|S \setminus (A \cup B \cup C)| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Das Prinzip kann man sich auch sehr schön am Mengendiagramm veranschaulichen (siehe unten).



Beispiel für Anwendungsszenarios von PIE: Die überwiegend grau gekennzeichneten Flächen werden dazu addiert, die mehrheitlich hellen Flächen abgezogen.

Aufgabe 10. *In einer Klasse gibt es viele Schüler, die Bilder ihrer Lieblingsrockstars sammeln. Achtzehn Schüler haben Bilder der Beatles, 16 Schüler besitzen Bilder von den Rolling Stones und 12 Schüler haben ein Bild von Elvis Presley (dies fand vor langer Zeit statt, als wir noch jung waren). Es gibt 7 Schüler, die sowohl von den Beatles als auch von den Rolling Stones Bilder haben, 5 Schüler, die Bilder von den Beatles und Elvis Presley besitzen und 3 Schüler, die von den Rolling Stones and Elvis Presley Bilder haben. Außerdem gibt es noch 2 Schüler, die Bilder von allen drei Gruppen besitzen. Frage: Wie viele Schüler gibt es in der Klasse, die von wenigstens einer dieser Rock Gruppen ein Bild besitzen?*

Lösung. Sei S die Menge der Schüler die ein Stones Bild besitzen, E die Menge der Schüler, die ein Elvis Bild besitzen, und B die Menge der Schüler, die ein Beatles Bild besitzen. Gesucht ist offenbar $|B \cup E \cup S|$.

Nach dem PIE gilt

$$\begin{aligned}|B \cup E \cup S| =& |B| + |E| + |S| - |B \cap E| - |B \cap S| - |E \cap S| + |B \cap E \cap S| \\ =& 18 + 12 + 16 - 5 - 7 - 3 + 2 \\ =& 33.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 11. *In einer reinen Jungen-Klasse, spielen 18 Jungen gerne Schach, 23 bevorzugen Fussball, 21 Rad fahren und 17 Wandern. Sowohl Schach als auch Fussball spielen 9 der Jungen. Wir wissen außerdem, dass 7 Jungen Schach und Rad fahren mögen, 6 begeistern sich für Schach und Wandern, 12 mögen Fussball und Rad fahren, während 9 Jungen für Fussball und Wandern und 12 für Rad fahren und Wandern sind. Es gibt 4 Jungen, die Schach, Fussball und Rad fahren mögen, 3 Jungen, die Schach, Fussball und Wandern bevorzugen, 5 Jungen, die Schach, Rad fahren und Wandern mögen, während 7 gerne Fussball spielen, Rad fahren und wandern. Schließlich gibt es noch 3 Jungen, die sich allen vier Aktivitäten gerne widmen. Wir wissen außerdem, dass jeder in der Klasse mindestens eine dieser Aktivitäten mag. Wie viele Jungen gibt es in der Klasse?*

Lösung.

F	Menge der Jungs die Fußball spielen
R	Menge der Jungs die Rad fahren
S	Menge der Schachspieler
W	Menge der Wanderer
J	Jungen in der Klasse

Weil jeder Junge mindestens eine dieser Aktivitäten mag wissen wir:

$$J = F \cup R \cup S \cup W.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}|F \cup R \cup S \cup W| =& |F| + |R| + |S| + |W| - |F \cap R| - |F \cap S| - |F \cap W| - |R \cap S| - |R \cap W| - |S \cap W| + \\ &+ |F \cap S \cap R| + |F \cap S \cap W| + |F \cap W \cap R| + |W \cap S \cap R| - |F \cap R \cap S \cap W| \\ =& 18 + 21 + 23 + 17 - 12 - 9 - 9 - 7 - 12 - 6 + 4 + 3 + 7 + 5 - 3 \\ =& 40\end{aligned}$$

□

Aufgabe 12. *Bestimme die Anzahl der natürlichen Zahlen* $x \leq 1000$, *die nicht durch* 2, 3 *oder* 5 *teilbar sind.*

Lösung. Sei $A_k := \{x \in \mathbb{N} \mid 3|x \wedge x < 100\}$. Gesucht ist offenbar $[100] \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5)$.

Wir bestimmen nacheinander einfach alle benötigten Mengen

$$\begin{aligned}|A_2| =& 500 \\ |A_3| =& 333 \\ |A_5| =& 200 \\ |A_2 \cap A_3| =& 166 \\ |A_2 \cap A_5| =& 100 \\ |A_3 \cap A_5| =& 66 \\ |A_2 \cap A_3 \cap A_5| =& 33.\end{aligned}$$

Jetzt können wir die Anzahl berechnen:

$$\begin{aligned}
|[1000] \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5) =& |[1000]| - |A_2| - |A_3| - |A_5| + \\
&+ |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\
=& 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 \\
=& 266
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 13. *In einer Bibliothek gibt es s verschiedene Mathebücher. Jedes Buch ist genau einmal vorhanden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, alle Bücher auf*

(a) *3*

(b) *4*

(c) $n \leq s$

Schüler zu verteilen. Dabei darf kein Schüler ohne Buch nach Hause gehen und jedes Buch wird verliehen.

Lösung. (a) Seien A_1, A_2 und A_3 die Verteilungen von Büchern, so dass Schüler 1, 2 bzw. 3 kein Buch erhalten. Schauen wir uns A_1 etwas genauer an. Schüler 1 bekommt kein Buch, Schüler 2 und Schüler 3 können sich aber beliebige Bücher nehmen. Buch 1 kann an Schüler 2 oder Schüler 3 verliehen werden, dies ergibt 2 Möglichkeiten. Gleiches gilt für das zweite Buch. Wir haben jetzt 4 Möglichkeiten, da die Möglichkeiten multipliziert werden müssen. Setzt man diese Gedanken für die restlichen Bücher fort, so erhält man

$$|A_1| := 2^s.$$

Analog erhält man $|A_2| = |A_3| = 2^s$. Da wir bei allen möglichen Verteilungen pro Buch 3 mögliche Abnehmer haben, ergibt sich $3^s = S$. Für $A_1 \cap A_2$ haben wir nur die Möglichkeit, das Schüler 3 alle Bücher ausleiht. Für $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ gibt es gar keine Möglichkeit. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
|S \setminus (\bigcup_{i=1}^{3} A_i)| =& |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
=& 3^s - 2^s - 2^s - 2^s + 1 + 1 + 1 - 0 \\
=& 3^s - 3 \cdot 2^s + 3.
\end{aligned}$$

(b)

$$|S \setminus (\bigcup_{i=1}^{3} A_i)| = 4^s - 4 \cdot 3^s + 6 \cdot 2^s - 4$$

(c)

$$\begin{aligned}
|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = & \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
=& n^s - \binom{n}{1}(n-1)^s + \binom{n}{2}(n-2)^s - + \cdots + - \binom{n}{n-1} 1^s
\end{aligned}$$

□

Definition 6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Anzahl aller teilerfremden, natürlichen Zahlen kleiner oder gleich n wird mit $\varphi(n)$ bezeichnet. Die Funktion φ wir auch *Eulersche φ-Funktion* genannt.

Aufgabe 14. *Bestimmt $\varphi(n)$ für $n = 1, \ldots, 11$.*

Lösung.

n	φ
1	1
2	1
3	2
4	2
5	4
6	2
7	6
8	4
9	6
10	4
11	10

□

Aufgabe 15. *Eulersche φ-Funktion Beweise mit Inklusion-Exklusion*

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_t}\right),$$

wobei p_i die Primteiler von n sind.

Lösung. Sei A_i die Anzahl der Zahlen $1 \leq x \leq n$ die durch p_i teilbar sind. Dieses Zahlen können sogar angegeben werden:

$$p_i, 2p_i, \ldots, \left(\frac{n}{p_i}\right) p_i.$$

Die Anzahl der Elemente von A_i ist also genau $\left(\frac{n}{p_i}\right)$. Analog funktioniert dies bei $\bigcap_{i\in I} A_i$. Hier ist die Anzahl der Elemente $n/(\prod_{i=1}^{|I|} p_i)$.

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\ &= \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} n \prod_{i\in I} \frac{1}{p_i}\end{aligned}$$

Wir klassifizieren die Teilmengen je nachdem, ob sie p_n enthalten oder nicht.

$$\begin{aligned}&= n\left(\sum_{I\subseteq[n-1]} (-1)^{|I|} \prod_{i\in I} \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_n} \sum_{I\subseteq[n-1]} (-1)^{|I|-1} \prod_{i\in I} \frac{1}{p_i}\right) \\ &= n\left(\sum_{I\subseteq[n-1]} (-1)^{|I|} \prod_{i\in I} \frac{1}{p_i}\right)\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \\ &\ \vdots \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)\end{aligned}$$

Wir haben dabei benutzt, dass $\prod_{i\in\emptyset} \frac{1}{p_1} = 1$. □

Aufgabe 16. *Sei $\mathcal{A} : \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein Alphabet. Wir wollen Wörter der Länge $2n$ bilden, so dass jedes Zeichen des Alphabets genau 2 mal auftritt. Außerdem dürfen gleiche Zeichen nie nebeneinander auftreten.*

Lösung. Für $n = 2$ gibt es lediglich 2 Wörter, nämlich $a_1a_2a_1a_2$ und $a_2a_1a_2a_1$. Wir sagen S ist die Menge der Wörter der Länge $2n$, die jeden Buchstaben a_i genau zwei mal enthalten. $A_i \subsetneq S$ sei die Menge der Wörter, bei denen die zwei Positionen des i-ten Symbols benachbart sind.

Wie groß ist die Menge $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$. Die Buchstaben $a_1, a_2, \ldots, a_{i_k}$ treten hier aufeinander folgend auf. Die Positionen der Buchstaben $a_1, a_2, \ldots, a_{i_k}$ ist durch die erste Position der a_is eindeutig bestimmt. Daher wählen wir aus $2n-1$ Stellen k aus, so dass diese sich um wenigstens 2 unterscheiden. Eine andere Formulierung dieses Problem lautet: Finde k Zahlen $a_1, \ldots a_k$, so dass die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \cdots < a_k - k + 1 \leq 2n - 1.$$

Wir ordnen $a_i - i + 1$ die Zahl b_i zu. Beachte, dies ist eine Bijektion. Damit ergibt sich

$$1 \leq b_1 < b_2 - 1 < b_3 - 2 < \cdots < b_k - k + 1 \leq 2n - k.$$

Dies zeigt, es ist egal, ob wir k Zahlen aus $2n-1$ wählen, so dass diese sich um wenigstens 2 unterscheiden, oder ob wir k Zahlen aus $2n - k$ wählen. Dies ist unabhängig von der Reihenfolgen, auf die es bei aber doch ankommt. Um noch die Reihenfolge der a_{i_j}s zu beachten, müssen wir mit $k!$ multiplizieren. Die anderen Buchstaben wollen aber auch platziert werden. Dafür haben wir $\frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}}$. Damit gilt

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \binom{2n-k}{k} k! \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}}.$$

Offenbar ist die Größe der Menge unabhängig von der Wahl der konkreten Mengen. Um aus n Mengen k auszuwählen, haben wir $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

$$\begin{aligned} |S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)| &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-k}{k} k! \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} \end{aligned}$$

Jetzt drehen wir die Summe um. $k \mapsto n - k$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n+k}{n-k} (n-k)! \frac{(2k)!}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{2^k} \end{aligned}$$

□

Literatur

Martin Aigner. *Diskrete Mathematik.* Springer, 6. auflage edition, 2006.

Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise.* Springer, 2002.

Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies.* Springer, 1998.

Lá szló Lová sz, Jó zsef Peliká n, Katalin Vesztergombi, and Sabine Giese. *Diskrete Mathematik.* Springer, 2005.