

Rezension zu

Oliver Deiser

Reelle Zahlen: Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen

2008

553 Seiten

Taschenbuch

29,95 Euro

ISBN: 978-3540793755

Springer-Verlag

Die reellen Zahlen bilden eine wesentliche Grundstruktur der Mathematik. Da man spätestens in der achten Klasse lernt, ganz selbstverständlich mit Objekten hantieren, die man reelle Zahlen nennt, könnte man leicht auf die Idee kommen, dass diese Struktur sehr einfach gestrickt ist. Das dem wahrscheinlich doch nicht so ist, wird einem spätestens dann bewußt, wenn man zum ersten mal von so seltsamen Phänomenen wie dem Banach-Tarski-Paradoxon hört.

Das vorliegende Buch beschäftigt sich aus grundlagentheoretischer Sicht mit den reellen Zahlen. Dabei werden zwei prinzipiell verschiedene Sichtweisen vorgestellt. Im ersten Teil geht es um das klassische Kontinuum und dessen Entwicklung, angefangen mit der Entdeckung der irrationalen Zahlen durch die alten Griechen. Neben der eigentlichen mathematischen Konstruktion wird hier immer der historische Hintergrund zu den auftretenden konzeptionellen Schwierigkeiten (infinitesimale Zahlen, mengentheoretische Paradoxien) mitgeliefert und an zahlreichen Originalzitate lebendig gemacht. Ausführlich werden die Grundlagen der Maßtheorie behandelt. Als Konsequenz von intuitiv einleuchtenden Annahmen ergeben sich dann eine Reihe von kontraintuitiven Resultaten wie das Banach-Tarski-Paradoxon.

Im zweiten Teil geht es um Folgenräume, im wesentlichen um den Raum der 0-1-Folgen (homöomorph zur Cantormenge) und den Raum der Folgen natürlicher Zahlen (homöomorph zur Menge der irrationalen Zahlen). Die Topologien dieser Räume werden im allgemeineren Kontext der polnischen Räume diskutiert, und als eine Konsequenz die Existenz von Peano-Kurven gezeigt. Ausgehend von den grundlegenden topologischen Eigenschaften werden dann Regularitätseigenschaften, irreguläre Mengen, unendliche Zweipersonenspiele, Borelmengen und projektive Mengen diskutiert. Eingefügt ist ein Intermezzo, in dem kurz und knapp die Grundlagen der transfiniten Arithmetik (inklusive der Definition der konstruktiblen Mengen) bereitgestellt werden.

Das Buch ist eine sehr zu empfehlende Lektüre für jeden, der eine großartige menschliche Kulturleistung besser verstehen will. Der Stil ist sehr gut lesbar. Formale Definitionen und Beweisschritte werden immer zuerst anschaulich beschrieben und überzeugend motiviert, und vor allem ist dem Autor eine angenehme Balance zwischen formaler Strenge und skizzierten Ideen gelungen. Insbesondere durch die Einbettung in den historischen Kontext wird die Entwicklung der Konzepte schön verdeutlicht. Sehr hilfreich für das Verständnis sind die zahlreichen in den laufenden Text eingestreuten Übungsaufgaben, die so konzipiert sind, dass der Leser gezwungen ist, kurz über das gerade gelesene nachzudenken, ohne dass die Gefahr von Frustrationserlebnissen besteht. Vorbildlich sind auch die ausführlichen Literaturlisten am Ende jedes Kapitels, die einen problemlosen Einstieg in ein vertieftes Studium ermöglichen. An Vorkenntnissen wird formal gar nichts vorausgesetzt. Die benötigten Grundlagen zur Mengenlehre, Analysis und Topologie werden in Anhängen bereitgestellt. Allerdings wird wohl ein Leser, der zum ersten Mal einen topologischen Raum sieht, besonders im zweiten Teil überfordert sein. Für Studenten mit den Kenntnissen aus den Grundvorlesungen ist das Buch aber uneingeschränkt zu empfehlen.